Die Gymnasiale Oberstufe im Land Bremen

Mathematik

Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe

– Einführungsphase und Qualifikationsphase –

Die Senatorin für Kinder und Bildung

Freie
Hansestadt
Bremen

Herausgeberin
Die Senatorin für Kinder und Bildung,
Rembertiring 8-12
28195 Bremen
http://www.bildung.bremen.de

Stand: 2022

Curriculumentwicklung
Landesinstitut für Schule
Abteilung 2 - Qualitätssicherung und Innovationsförderung
Am Weidedamm 20
28215 Bremen
Ansprechpartnerin: Dr. Nike Janke

Bezugsadresse: http://www.lis.bremen.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Mit dem vorliegenden *Bildungsplan Mathematik – Einführungsphase und Qualifikationsphase* – liegt ein Bildungsplan vor, der die drei Jahrgänge der Gymnasialen Oberstufe umfasst. Er schließt damit sowohl an den *Bildungsplan Mathematik für die Oberschule* für die Jahrgänge 5 bis 10 als auch an den *Bildungsplan Mathematik für das Gymnasium, Jahrgangsstufe 5-10*, eingeschränkt auf die Jahrgangsstufen 5 bis 9, also bis zum Eintritt in die Einführungsphase, an.

Bildungspläne orientieren sich an Standards, in denen die zu erwartenden Lernergebnisse als Könnensbeschreibungen und verbindliche Anforderungen formuliert sind. In den Standards werden die Lernergebnisse durch fachbezogene Kompetenzen beschrieben, denen fachdidaktisch begründete Kompetenzbereiche zugeordnet sind. Die Kompetenzbereiche setzen die Beschreibung aus den Jahrgangsstufen 5 bis 10 im Bildungsplan der Oberschule und aus den Jahrgangsstufen 5 bis 9 des gymnasialen Bildungsganges fort. Es wird damit deutlich, dass der Mathematikunterricht im gesamten Bildungsgang einheitlichen Zielsetzungen genügt.

Die in diesem Bildungsplan beschriebenen Standards für die Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe setzen die Anforderungen für den Eintritt in die Qualifikationsphase. Für die Qualifikationsphase der Gymnasialen Oberstufe beschreibt der Bildungsplan die Standards für das Ende des Bildungsganges und damit die Anforderungen für die Abiturprüfung in den benannten Kompetenzbereichen.

Sowohl für die Einführungsphase als auch für die Qualifikationsphase sind inhaltsbezogene Kompetenzen ausdifferenziert, die sich auch länderübergreifend etablieren und zu entsprechenden Abiturprüfungen führen. Die Schulen sind bei der Erstellung von Curricula dennoch angehalten, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Mit den Bildungsplänen werden durch die Standards die Voraussetzungen geschaffen, ein klares Anspruchsniveau in den Schulen der Freien Hansestadt Bremen zu schaffen.

1. Aufgaben und Ziele

Der Mathematikunterricht der Gymnasialen Oberstufe setzt den Prozess des Mathematiklernens als Ausbildung von prozessbezogenen Kompetenzen und inhaltsbezogenen Kompetenzen aufbauend auf der Entwicklung von Kompetenzen, die bis zum Eintritt in die Einführungsphase erworben wurden, fort. Die Lernenden lernen in den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie unterschiedliche Arten mathematischer Theoriebildung mit spezifischen mathematischen Denkweisen, eigenen Fragestellungen und Phänomenen, besonderen Arten der Begriffsbildung, Darstellungsweisen und Anwendungsbereichen sowie Vernetzungsmöglichkeiten zwischen diesen Gebieten kennen.

Der Mathematikunterricht in der Einführungsphase und der Qualifikationsphase ist so gestaltet, dass die Lernenden ein ausgewogenes Bild von Mathematik in Hinblick auf Anwendungs-, Problemlöse- und Strukturorientierung entwickeln, und zwar durch die folgenden drei Grunderfahrungen:

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben heuristische Fähigkeiten, also Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben.

Die erste Grunderfahrung ist damit verbunden, sich die Welt durch mathematisches Modellieren zu erschließen. Dazu stellen die Sachgebiete Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie / Lineare Algebra algebraische, analytische, statistische, wahrscheinlichkeitstheoretische, geometrische und strukturelle Mittel zur Verfügung. Dabei werden Inhalte aus den Klassen 5 bis 10 bzw. 5 bis 9 aufgegriffen: in der Analysis funktionale Zusammenhänge, in der Stochastik der Umgang mit Daten und Zufall und in der Linearen Algebra / Analytischen Geometrie die Algebraisierung und Geometrisierung von Sachverhalten. Die zugehörigen inhaltsbezogenen Kompetenzen sollen in der Gymnasialen Oberstufe vertieft, weitergeführt, ausgebaut und miteinander vernetzt werden, vor allem um „Erscheinungen der Welt“ vertieft zu verstehen.

Die zweite Grunderfahrung weist darauf hin, dass Mathematik mit ihren Symbolen, Diagrammen, Bildern, Techniken sowie ihrer Fachsprache eine eigene wissenschaftliche Welt darstellt, in der auf eine spezifische Weise argumentiert und kommuniziert wird, in der auf eine besondere Weise Begriffe gebildet werden und mit Begriffen und Verfahren umgegangen wird. Die Art des Argumentierens und Kommunizierens gewinnt durch die Inhalte der drei Sachgebiete der Gymnasialen Oberstufe eine für das jeweilige Sachgebiet spezifische Ausprägung. Der funktionale Zusammenhang als eine zentrale Idee für die Analysis ist eng verbunden mit der Idee der lokalen oder auch globalen Veränderung. Der Strukturgedanke der Linearen Algebra ist eng verzahnt mit dem vernetzten Aufbau eines formalen in unterschiedlichen Kontexten anwendbaren Begriffssystems. Die Analytische Geometrie setzt das algebraisch-symbolische Verarbeiten geometrischer Sachverhalte fort. Die Idee vom Arbeiten mit Daten und Zufall ist mit typischen und heute bedeutsamen Anwendungsbereichen eng verzahnt.

Die dritte Grunderfahrung weist darauf hin, dass Mathematik generell als Problemlöseaktivität erfahren werden kann. Problemlösen hat in den Sachgebieten Analysis, Stochastik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie seinen jeweils spezifischen Charakter und kann sowohl innermathematisch motiviert sein als auch durch realitätsbezogene Fragen angeregt und in Modellierungsprozesse eingebettet werden. Lernende machen sich Fragestellungen zu eigen und bilden tragfähige Kompetenzen zur Nutzung von heuristischen Strategien und zur Planung, Ausführung und Reflexion von Problemlöseprozessen aus, in denen sie mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Lernen in der Gymnasialen Oberstufe ist vorstellungsorientiert und vernetzend. Vorstellungsorientiertes Lernen zielt auf den Aufbau verschiedener Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen wie beispielsweise dem der Ableitung im Sachgebiet Analysis. Vernetzendes Lernen stellt eine besondere Anforderung dar. Die Lernenden lernen kontextbezogen und kumulativ, das heißt Gelerntes ist kontextabhängig und Kontextuelles wird mitgelernt. Deshalb werden im Unterricht vernetzende Kontexte gezielt gestaltet. Ein vernetzender Kontext wird hergestellt, indem zentrale Inhalte und Methoden entweder aus einem Sachgebiet oder über verschiedene Sachgebiete hinweg, wie es in den Leitideen der Bildungsstandards formuliert ist, aufgegriffen und mit den drei Grunderfahrungen verzahnt auf einen innermathematischen oder realitätsbezogenen Sachkontext bezogen werden. Gestaltet wird eine kontextbezogene Lernumgebung durch Beispiele, die typisch sind für den Zugang zahlreicher Inhalte und Methoden und eine kontextbezogene Erschließung der jeweiligen Begriffe ermöglichen.

Kompetenzen aus fächerübergreifenden Querschnittsthemen können und sollen in den Mathematikunterricht der Gymnasialen Oberstufe einfließen. Die Ausgestaltung liegt dabei in der Hand der Fachkonferenzen und kann beispielsweise im Rahmen einer thematischen Ausrichtung der Schule („MINT-freundliche Schule“, „Schule ohne Rassismus – Schule mit Courage“ etc.) erfolgen. Genannt sei hier insbesondere der Bereich der Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE), der sich thematisch an den für die Sekundarstufe I gültigen Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklung der Kultusministerkonferenz anschließen kann. Ein weiteres Beispiel sind Inhalte, die zu einer positiven Haltung gegenüber Diversität beitragen. Die Möglichkeit des Mathematikunterrichts besteht insbesondere darin, inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen an Sachkontexten aus diesen Bereichen zu behandeln.

Arbeiten in der Einführungsphase

Die Einführungsphase ist im Allgemeinen durch Lerngruppen gekennzeichnet, in denen die Lernenden aus verschiedenen Bildungsgängen zusammenkommen und folglich heterogene Bildungsbiographien aufweisen. Dies betrifft zum einen den Eintritt in die Einführungsphase nach Klasse 9 (achtjähriger gymnasialer Bildungsgang) oder Klasse 10 (neunjähriger Bildungsgang der Oberschule): Die Lernenden des neunjährigen Bildungsgangs besitzen bereits den Mittleren Schulabschluss, dessen Inhalte die Lernenden des achtjährigen Bildungsgangs teilweise erst im Laufe der Einführungsphase erlernen. Zum anderen unterscheidet der neunjährige Bildungsgang der Oberschule zwischen Mathematikunterricht auf grundlegendem und auf erhöhtem Anforderungsniveau mit entsprechenden Unterschieden in der Ausprägung von prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Ein Ziel des Mathematikunterrichts insbesondere der Einführungsphase besteht in einem Ausgleich solcher Heterogenität mit dem Ziel, auf gleichen Voraussetzungen aufbauend die Kompetenzen zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife zu erwerben.

Aufgaben – und zielbezogenes Arbeiten

In der Einführungsphase und dann zunehmend in der Qualifikationsphase arbeiten die Lernenden selbstständig an mathematischen Fragen zu innermathematischen Zusammenhängen und realen Sachverhalten. Die benannten prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen können nur dann tiefgreifend entwickelt werden, wenn die Lernenden sich aktiv mit Mathematik auseinandersetzen. Die wiederholte Aktualisierung und Weiterentwicklung von Kompetenzen in Verbindung mit den drei Grunderfahrungen schafft nicht nur Sicherheit im Umgang mit mathematischen Inhalten, sie ist auch Basis für jegliches Weiterlernen.

Die Lernenden nutzen digitale Medien als Instrumente zur Kommunikation, Informationsbeschaffung und Erkundung von Fragestellungen. Bei der Verwendung leistungsfähiger digitaler Rechenwerkzeuge wie beispielsweise einem Computeralgebrasystem treten berechnende Tätigkeiten gegenüber verstehenden, begründenden und erklärenden Aktivitäten in ihrer Bedeutung zurück. Das drückt sich auch in der Entwicklung inhaltlicher und prozessbezogener Kompetenzen aus, beispielsweise dadurch, dass die Kenntnis einer Ableitungsregel nicht mehr durch formales Ableiten überprüft wird. Stattdessen könnten z. B. Herleitungsschritte von Ableitungsregeln begründet werden.

Gleichzeitig sollen aber Kompetenzen auch ohne die Verwendung digitaler Rechenwerkzeuge entwickelt werden. Neben einem grundsätzlichen Verständnis mathematischer Sachverhalte wird hier insbesondere der Umgang mit den formalen Elementen der Mathematik und mit händischen Problemlösestrategien geschult.

Grund- und Leistungskurse

Grund- und Leistungskurse in der Qualifikationsphase unterscheiden sich nicht hinsichtlich der Art der zu entwickelnden Kompetenzen. In beiden Kursarten soll modelliert werden, sollen Probleme selbstständig gelöst werden, soll ausgiebig mathematisch argumentiert und kommuniziert werden, sollen Symbole, Werkzeuge und Darstellungen sinnvoll genutzt werden. Die Unterscheidung zwischen Grund- und Leistungskursen besteht in der Ausprägung kompetenzorientierten Arbeitens. Die Lernenden im Leistungskurs sollen die mathematischen Inhalte und Prozesse inhaltlich und argumentativ tiefer durchdringen als diejenigen im Grundkurs. Sie sollen komplexere Situationen bewältigen und mit mathematischen Fragen und Inhalten reflektierter umgehen können. Leistungskurse unterscheiden sich von Grundkursen auch durch die Auseinandersetzung mit einer größeren Anzahl von inhaltlichen Kompetenzen, durch die ebenfalls eine solche Vertiefung erreicht werden soll.

2. Standards

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, die von der Kultusministerkonferenz am 18.10.2012 beschlossen wurden, gelten für den zur Abiturprüfung führenden Unterricht in der Gymnasialen Oberstufe. In diesen Standards werden die mathematischen Kompetenzen beschrieben, die Lernende am Ende der Qualifikationsphase erworben haben sollen. Die in diesem Bildungsplan beschriebenen prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen berücksichtigen die Bildungsstandards vollumfänglich, wobei Schwerpunktsetzungen erfolgen und die inhaltsbezogenen Kompetenzen (Kap. 3) die Inhalte der Bildungsstandards konkretisieren und in ihren Details klar beschreiben.

Für die Lernenden des neunjährigen Bildungsgangs beginnt die Kompetenzentwicklung gemäß diesen Standards bereits in der Einführungsphase, da sie zuvor den Mittleren Schulabschluss erworben haben. Für Lernende des achtjährigen gymnasialen Bildungsgangs dagegen ist die Einführungsphase ein Jahr des Übergangs, in dem sie abschließend die Kompetenzen gemäß den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss erwerben und außerdem Kompetenzen erlernen, wie sie in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife beschrieben sind. Typischerweise findet man in Lerngruppen der Einführungsphase Lernende sowohl eines achtjährigen wie eines neunjährigen Bildungsgangs. Die Entwicklung von Unterricht in dieser vielschichtigen Situation wird dadurch ermöglicht, dass die Kompetenzen der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife eine Fortsetzung und Weiterentwicklung der Kompetenzen der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss beschreiben. Dies betrifft sowohl prozessbezogene Kompetenzen als auch inhaltsbezogene Kompetenzen, die mithilfe von fünf Leitideen strukturiert sind.

Prozessbezogene Kompetenzen	Leitideen
K1 Mathematisch argumentieren K2 Probleme mathematisch lösen K3 Mathematisch modellieren K4 Mathematische Darstellungen verwenden K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen K6 Mathematisch kommunizieren	L1 Algorithmus und Zahl L2 Messen L3 Raum und Form L4 Funktionaler Zusammenhang L5 Daten und Zufall

Die folgenden Abschnitte widmen sich den prozessbezogenen Kompetenzen (Abschnitt 2.1) und Leitideen (Abschnitt 2.2) auf der Grundlage der Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife. Sie werden ergänzt durch

- eine detaillierte – nach Sachgebieten geordnete – Auflistung inhaltsbezogener Kompetenzen (Kapitel 3);
- inhaltsbezogene Kompetenzen aus der Sekundarstufe I, sofern sie nicht bereits in den Bildungsplänen jedes Bildungsgangs, der zur Einführungsphase führen kann, verzeichnet sind; diese beruhen auf den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Kapitel 3). Diese Kompetenzen beziehen sich auf Themen

aus der Algebra, der Geometrie und der Funktionenlehre. Das bedeutet, dass Themen, die hier nicht explizit genannt werden, bei achtjährigen Bildungsgängen bereits nach Klasse 9 und bei neunjährigen Bildungsgängen bereits nach Klasse 10 abgeschlossen sein müssen oder ggf. in der Qualifikationsphase wieder aufgegriffen werden (wie beispielsweise die Kombinatorik aus dem Sachgebiet Stochastik).

- Kompetenzen, die im Mathematikunterricht im Zusammenhang mit dem Konzept der digitalen Bildung erworben werden (Abschnitt 2.3).

Die in der Sekundarstufe I und in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Qualifikationsphase. Sie werden dort gefestigt, vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein.

2.1 Prozessbezogene Kompetenzen

Die sechs prozessbezogenen Kompetenzen – in den Bildungsstandards als „allgemeine mathematische Kompetenzen“ bezeichnet – erfassen das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, diese Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Es ist vielmehr typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden. Die prozessbezogenen Kompetenzen werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben und weiterentwickelt, wie sie in den Leitideen (Abschnitt 2.2) – auch Sachgebiete übergreifend – verknüpft und in den inhaltsbezogenen Kompetenzen (Abschnitt 3) im Hinblick auf den Unterricht und die Abiturprüfung konkretisiert sind. Umgekehrt erschließen sich Inhalte mithilfe der in den Kompetenzen K1 bis K5 genannten mathematischen Tätigkeiten. Diese Aspekte werden in Beispielen thematisiert und in weiteren reichhaltigen Kontexten vertieft, damit sie am Ende der Qualifikationsphase nachhaltig und sicher zur Verfügung stehen. Mathematische Bildung zeigt sich in der flexiblen und verbundenen Aktivierung dieser allgemeinen mathematischen und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Beide Bereiche sind Gegenstand des Unterrichts und der Leistungsbewertung.

Im Folgenden werden die sechs prozessbezogenen Kompetenzen näher beschrieben, insbesondere auch durch ihre jeweiligen Ausprägungen in den drei Anforderungsbereichen. Der Schwerpunkt liegt jeweils im Anforderungsbereich II, und darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. Grund- und Leistungskurs unterscheiden sich dabei in ihrer Akzentuierung: Im Grundkurs sind die Anforderungsbereiche I und II stärker zu akzentuieren, im Leistungskurs die Anforderungsbereiche II und III. Die Ausprägung der Kompetenzen in Anforderungsbereichen ist als Orientierung zu verstehen und kann nicht trennscharf verstanden werden; vielmehr kann es beispielsweise in konkreten Aufgabenszenarien Abweichungen geben.

K1	Mathematisch argumentieren
Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“.	
Anforderungsbereich I: Die Lernenden können • Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen usw.) wiedergeben und anwenden • einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen • Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen **Anforderungsbereich II:** Die Lernenden können • überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln **Anforderungsbereich III:** Die Lernenden können • Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln • verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten	

K2	Probleme mathematisch lösen
Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.	
Anforderungsbereich I: Die Lernenden können • einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden **Anforderungsbereich II:** Die Lernenden können • einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden **Anforderungsbereich III:** Die Lernenden können • eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden	

K3	**Mathematisch modellieren**
Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis zu komplexen Modellierungen.	
Anforderungsbereich I: Die Lernenden können • vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden • eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen • ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen **Anforderungsbereich II:** Die Lernenden können • mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen • Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren • ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen **Anforderungsbereich III:** Die Lernenden können • eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen • mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten	

K4	**Mathematische Darstellungen verwenden**
Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.	
Anforderungsbereich I: Die Lernenden können • Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen **Anforderungsbereich II:** Die Lernenden können • gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern • zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln **Anforderungsbereich III:** Die Lernenden können • mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen	

- eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln
- verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen

K5	**Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

Anforderungsbereich I: Die Lernenden können

- elementare Lösungsverfahren verwenden
- Formeln und Symbole direkt anwenden
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen

Anforderungsbereich II: Die Lernenden können

- formale mathematische Verfahren anwenden
- mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen

Anforderungsbereich III: Die Lernenden können

- komplexe Verfahren durchführen
- verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten
- die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren

K6	**Mathematisch kommunizieren**

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Sprachliche Anforderungen spielen bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

Anforderungsbereich I: Die Lernenden können

- einfache mathematische Sachverhalte darlegen
- Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt

Anforderungsbereich II: Die Lernenden können

- mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen
- Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren
- mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss

Anforderungsbereich III: Die Lernenden können

- eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren
- mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen
- mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischem Gehalt von anderen Personen miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren

2.2 Leitideen

Die Leitideen aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife umreißen die Inhalte, die im Mathematikunterricht der Gymnasialen Oberstufe bis zur Abiturprüfung zu thematisieren sind. Sie zeigen das Ineinandergreifen der drei Sachgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie und verdeutlichen obendrein die Vernetzung von Inhalten von der Sekundarstufe I kommend über die Jahrgänge hinweg. Als Beispiel sei die Leitidee L2 „Messen“ genannt: Sie beinhaltet die Ermittlung von Sekanten- und Tangentensteigungen (Analysis) und von Flächeninhalten (Analysis, Analytische Geometrie), die Bestimmung von Winkeln (Analysis, Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und die Bestimmung von Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Stochastik). Die Vernetzung der Sachgebiete durch die Leitideen liefert somit didaktische Hinweise für die unterrichtliche Behandlung.

Die Inhalte der Leitideen sind in diesem Abschnitt nicht im Einzelnen aufgeführt, sondern werden in Kapitel 3 in inhaltsbezogene Kompetenzen übersetzt, konkretisiert und im Hinblick auf den Unterricht und die Abiturprüfung sinnvoll ergänzt. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen sind dort nach Sachgebieten gegliedert und spiegeln so die unterrichtliche Praxis und die Struktur der Abiturprüfungsaufgaben wider. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen sind in ihrer Anwendung dabei stets mit den oben beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen verschränkt.

Bei der Beschreibung der Leitideen wird im Sachgebiet Lineare Algebra / Analytische Geometrie der Schwerpunkt alternativ auf die Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen (Alternative „Lineare Algebra“) oder die vektorielle Analytische Geometrie (Alternative „Analytische Geometrie“) gesetzt; sie sind hier deshalb in den Aufzählungen gesondert genannt.

L1	Algorithmus und Zahl

Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der **Analysis** und die **Lineare Algebra.**

L2	Messen

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkelgrößen, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.

Die darauf bezogenen mathematischen **Sachgebiete** der Sekundarstufe II sind die **Analysis**, die **Analytische Geometrie** und die **Stochastik**.

L3	Raum und Form

Diese Leitidee ist auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten im Raum. Es geht hier sowohl um Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte als auch um Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware.

Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist in erster Linie die **Analytische Geometrie**.

L4	Funktionaler Zusammenhang

Diese Leitidee ist darauf gerichtet, die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern, auch in stochastischen Kontexten. Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die **Analysis und** die **Stochastik**.

L5	Daten und Zufall
Diese Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software. Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist in erster Linie die **Stochastik**.	

2.3 Bildung in der digitalen Welt

Die prozessbezogene Kompetenz K5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen) verweist auf digitale Mathematikwerkzeuge und enthält damit ein Element, das auf einen Umgang der Lernenden mit digitalen Medien hinzielt. Die fortschreitende Digitalisierung der Lebens-, Berufs- und Arbeitswelt erfordert für eine aktive und verantwortliche Teilhabe am kulturellen, gesellschaftlichen, politischen, beruflichen und wirtschaftlichen Leben jedoch ein breiteres Spektrum an Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien.

Grundlagen für die schulische Gestaltung des Themas der digitalen Medien sind die Strategie „Bildung in der digitalen Welt“ (2016) und die ergänzende Empfehlung „Lehren und Lernen in der digitalen Welt (2021) der Kultusministerkonferenz, die im Lande Bremen umgesetzt werden. Die Strategie „Bildung in der digitalen Welt“ liefert einen Rahmen bis zum Ende der Pflichtschulzeit, um Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien fachspezifisch zu konkretisieren. Es werden folgende sechs Kompetenzbereiche unterschieden:

DK 1 Suchen, Verarbeiten und Aufbewahren

DK 2 Kommunizieren und Kooperieren

DK 3 Produzieren und Präsentieren

DK 4 Schützen und sicher Agieren

DK 5 Problemlösen und Handeln

DK 6 Analysieren und Reflektieren

Im weiteren Verlauf der Gymnasialen Oberstufe sollen die dort beschriebenen Kompetenzen erneut aufgegriffen und fächerspezifisch erweitert, vertieft und spezialisiert werden. Für das Fach Mathematik stehen die Kompetenzen

DK 5.2 Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen

DK 5.4 Digitale Werkzeuge und Medien zum Lernen, Arbeiten und Problemlösen nutzen

DK 5.5 Algorithmen erkennen und formulieren

im Vordergrund. Sie beinhalten die vertiefte Nutzung von dynamischer Mathematiksoftware und anderen digitalen Rechenwerkzeugen. Durch die allgemeine Verfügbarkeit von Hardware und eine breite Anbindung an das Internet können entsprechende Applikationen in Unterrichtssituationen einfach und bedarfsgerecht ein-gesetzt werden, um mathematische Fragestellungen und Modellierungen problemlösend zu bearbeiten. In den Bereich der Algorithmen fallen insbesondere Verfahren der numerischen Mathematik.

In der ergänzenden Empfehlung „Lehren und Lernen in der digitalen Welt“ wird die Verwendung digitaler Werkzeuge erweitert zur Gestaltung digital gestützter Lehr-Lern-Prozesse. Dazu zählen die digitale gestützte Kommunikation, individuelles Lernen und Üben mit digital gestützter Rückmeldung und die Erstellung kollaborativ-vernetzt erstellter digitaler Produkte der Lernenden.

Die Entwicklung von Kompetenzen in den genannten Bereichen soll dabei stets dem Primat der fachlichen Bildung folgen und im Zusammenklang mit den beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen und den Leitideen erfolgen.

3. Sachgebiete und inhaltsbezogene Kompetenzen

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen sind als Kompetenzen, über die alle Lernenden am Ende der Einführungsphase bzw. der Qualifikationsphase verfügen sollen, in den nachfolgenden Tabellen ausdifferenziert.

Erworbene Kompetenzen werden vernetzt. Das heißt, dass Kompetenzen, die bis zum Eintritt in die Einführungsphase entwickelt worden sind, dort und auch in der Qualifikationsphase aufgegriffen und in neue Sachgebiete integriert werden (vertikale Vernetzung). Vertikale Vernetzung wird in den alltäglichen Unterricht integriert, um kumulatives Lernen zu ermöglichen. Nach einführenden Modulen zu den Grundlagen aus Algebra, Geometrie und Funktionenlehre sind die inhaltsbezogenen Kompetenzen nach den drei Sachgebieten der Gymnasialen Oberstufe – Analysis, Stochastik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie – geordnet und dort wiederum in Module aufgeteilt. Die Sachgebiete gliedern den Mathematikunterricht und entsprechen auch der Einteilung einer Abiturprüfungsaufgabe in einzelne Aufgaben. Wie bei den Leitideen in Abschnitt 2.2 deutlich wird, sind sie dort, wo es sinnvoll und möglich ist, aufeinander bezogen und miteinander verbunden (horizontale Vernetzung). Kompetenzen zur horizontalen Vernetzung sind beispielhaft in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen dieses Kapitels sind im Verbund mit den prozessbezogenen Kompetenzen (Abschnitt 2.1) und den Kompetenzen zur Bildung in der digitalen Welt (Abschnitt 2.3) die Grundlage zur Erstellung schulinterner Curricula für die Einführungsphase und die Qualifikationsphase durch die Fachkonferenzen an den Schulen. Das schulinterne Curriculum beschreibt, welche Inhalte wie, wodurch und in welchem Zeitrahmen zur Entwicklung der Kompetenzen behandelt werden. Das schulinterne Curriculum ist für die jeweilige Schule verbindlich, soll aber Freiräume für individuelle Vorhaben einplanen.

Die nachfolgenden Tabellen bestehen aus drei Spalten. Die erste Spalte liefert eindeutige Bezeichnungen für die Module und die darin aufgelisteten inhaltsbezogenen Kompetenzen. Die Kompetenzen selbst sind in der zweiten Spalte aufgelistet. Spalte drei schließlich enthält Kommentare aus drei Kategorien: didaktische Hinweise Ⓓ, Hinweise zur Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge Ⓦ und Beispiele Ⓑ.

Bei der Verwendung der Tabellen ist zu beachten, dass sie keinen möglichen Unterrichtsgang abbilden; sie sind vielmehr zum Teil an der inhaltlichen Systematik ausgerichtet. Beispielsweise werden unter BM 3.1 bis BM 3.7 Kompetenzen im Umgang mit Funktionen beschrieben, während anschließend unter BM 3.8 bis BM 3.10

die Funktionsklassen und Funktionen aufgelistet sind, an denen diese Kompetenzen erarbeitet werden sollen. Auch die Kompetenzen im Umgang mit Sachkontexten, wie sie beispielsweise in BM 3.7 oder A 3.9 beschrieben sind, sind nicht singulär zu behandeln, sondern finden sich idealerweise als integraler Bestandteil des gesamten Mathematikunterrichts.

3.1 Einführungsphase

Lerngruppen in der Einführungsphase zeigen typischerweise eine heterogene Zusammensetzung aus Lernenden mit verschiedenen Bildungsbiografien aus acht- und neunjährigen Bildungsgängen. Ein unterrichtliches Ziel im ersten Teil der Einführungsphase ist deshalb die Schaffung gemeinsamer Grundlagen aus mathematischen Kenntnissen, Fertigkeiten und Kompetenzen mit Blick auf den weiteren Unterrichtsverlauf in der Einführungsphase und in der Qualifikationsphase. Dies geschieht binnendifferenziert durch die Einführung von Inhalten, die für einen Teil der Lerngruppe neu sind, sowie durch deren Vertiefung und Vernetzung. Die unterschiedlichen Eingangsvoraussetzungen zeigen sich vor allem in der Algebra und der Analysis, die deshalb ausführlich in der Einführungsphase thematisiert werden. Die curriculare Arbeit der Fachkonferenzen ist an dieser Stelle entscheidend, um eine flexible und bedarfsgerechte Integration der Lernenden in den Mathematikunterricht zu ermöglichen. Den weiteren Verlauf der Einführungsphase bestimmen inhaltsbezogene Kompetenzen, die auf den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife beruhen, wie sie in Kapitel 2 beschrieben sind.

Die hier beschriebene vertikale Vernetzung verdeutlicht die Relevanz der behandelten Kompetenzen und Inhalte auch für die Abiturprüfung.

Neben der Erarbeitung von Grundlagen aus Algebra und Geometrie (Module BM 1 und BM 2) vertiefen die Lernenden ihre in der Sekundarstufe I aufgebauten Vorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen. Insbesondere die Kovariationsvorstellung und die Vorstellung der Funktion als Ganzes (und damit einhergehend die Betrachtung von Globalverläufen von Funktionsgraphen) werden im Zusammenhang mit der Einführung von Begriffen und Verfahren aus der elementaren Analysis adressiert (Modul BM 3). Es kommen als infinitesimale Konzepte der Grenzwertbegriff und die quantitative Beschreibung von Veränderungsprozessen hinzu (Modul A 1).

	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Lernenden …	**Kommentare**
BM 1	**Basismodul 1:** **Grundlagen aus der Algebra**	
BM 1.1	verwenden • die binomischen Formeln • die Potenzgesetze • die Logarithmusgesetze als Rechentechnik und setzen sie bedarfsgerecht ein.	Ⓓ Diese Grundlagen sollten nicht als gesonderter Block thematisiert, sondern an geeigneten Stellen in den Unterricht integriert werden. Ⓓ Einsatz der binomischen Formeln beispielsweise im Zusammenhang mit dem Lösen quadratischer Gleichungen
BM 1.2	lösen folgende Arten von Gleichungen durch Auswahl und Durchführung geeigneter Verfahren: • lineare Gleichungen, • quadratische Gleichungen, • einfache Potenzgleichungen, • einfache Bruchgleichungen, • Wurzelgleichungen, • Exponentialgleichungen, • trigonometrische Gleichungen. führen komplexere Gleichungen gegebenenfalls auf die obigen Arten zurück. lösen Gleichungen näherungsweise und unter Zuhilfenahme digitaler Werkzeuge. lösen Ungleichungen. lösen einfache Gleichungssysteme.	Ⓑ Analytische Verfahren: • Lösungsformel (pq- oder abc-Formel) • Potenzieren • Wurzel ziehen • Logarithmieren • Nullproduktsatz Ⓑ Näherungs- bzw. numerische Verfahren • Newton-Verfahren (siehe A 1.4.) • Grafische und tabellarische Verfahren Ⓦ Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen insbesondere auch bei Gleichungen, die die Lernenden analytisch nicht lösen können Ⓓ, Ⓦ Lineare Gleichungssysteme: • Stets mit und ohne digitale Werkzeuge • Systematische Verfahren (siehe AG 2.1 / LA 1.1)

BM 2	**Basismodul 2:** **Geometrie**	
BM 2.1	stellen elementargeometrische, zweidimensionale Objekte im Koordinatensystem dar.	Ⓓ Es bietet sich eine Wiederholung der Arbeitsweise des lokalen Ordnens an Beispielen von ebenen Figuren und auch von Körpern an.
BM 2.2	nehmen Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken vor, indem sie die Sinus-, Kosinus- und Tangens-Beziehungen identifizieren und nutzen. deuten die trigonometrischen Zusammenhänge vor dem Hintergrund von Symmetrie.	Ⓓ Trigonometrie setzt Kenntnisse von Ähnlichkeit (auf der Ebene von Grundvorstellungen) voraus.

BM 3	**Basismodul 3:** **Grundlagen zu Funktionen**	
BM 3.1	sind vertraut mit dem **Funktionsbegriff** und verfügen über die relevanten Grundvorstellungen (Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung): • verstehen Funktionen als eindeutige Zuordnungen mit **Definitionsmenge**, **Wertebereich** und **Wertemenge**. • beschreiben die Veränderung der abhängigen Variablen bei Variation der unabhängigen Variablen. • stellen Zusammenhänge durch **Texte**, **Diagramme**, **Graphen**, **Tabellen** und **Formeln** dar und wechseln situationsgerecht zwischen den **Darstellungen** bzw. können diese ineinander überführen.	Ⓓ Funktionen als spezielle Abbildungen, Bild und Urbild Ⓓ Wertebereich: Grundmenge („y-Achse“); Wertemenge: Menge der angenommenen Werte einer Funktion Ⓓ Thematisierung von Zahlenmengen und Intervallen, auch als Definitionsmengen, Wertebereiche und Wertemengen Ⓦ Funktionsgraphen und Wertetabellen auch mit digitalen Werkzeugen
BM 3.2	ermitteln **zu gegebenen Argumenten zugehörige Funktionswerte** und umgekehrt **zu Funktionswerten zugehörige Argumente**. ermitteln **Schnittpunkte** von Funktionsgraphen **mit den Koordinatenachsen** (Nullstellen und y-Achsenabschnitt) und anderen **Funktionsgraphen**.	Ⓓ, Ⓦ Grafische, analytische und tabellarische Verfahren (auch mit digitalen Werkzeugen) Ⓓ Thematisierung mehrfacher Nullstellen bietet sich an.
BM 3.3	ermitteln **Symmetrien** von Funktionsgraphen (auch grafisch) und begründen sie mit dem Funktionsterm:	Ⓓ Es bietet sich an, Symmetrien bei ganzrationalen Funktionen zu behandeln und dies

	• **Achsensymmetrie** zur y-Achse, • **Punktsymmetrie** zum Koordinatenursprung .	exemplarisch auf Funktionen aus BM 3.8 bis BM 3.10 zu übertragen.
BM 3.4	ermitteln für die folgenden **Transformationen** von Funktionsgraphen die zugehörigen Funktionsgleichungen aus den ursprünglichen, indem sie entsprechende **Parameter** und Veränderungen an den Funktionstermen angeben: • **Verschiebungen** in x- und /oder y-Richtung**,** • **Streckungen/Stauchungen** in x- und / oder y-Richtung, • **Achsenspiegelungen** an den Koordinatenachsen und • **Punktspiegelung** am Koordinatenursprung.	Ⓓ Es bietet sich an, Transformationen bei ganzrationalen Funktionen durchzuführen und dies exemplarisch auf Funktionen aus BM 3.8 bis BM 3.10 zu übertragen. Ⓦ Visualisieren mit digitalen Mathematikwerkzeugen (z. B. mit dynamischer Geometriesoftware)
BM 3.5	untersuchen das Verhalten von Funktionen im **Unendlichen** und ermitteln **Grenzwerte**. bestimmen waagerechte und senkrechte **Asymptoten.**	Ⓓ Limes-Schreibweise Ⓓ Untersuchung auch anhand von Termdarstellungen Ⓦ auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen
BM 3.6	bilden grafisch und rechnerisch **Umkehrfunktionen** und bestimmen deren **Definitionsmege**, **Wertebereich** und **Wertemenge**.	Ⓓ auch Fragen der Existenz behandeln
BM 3.7	erkennen in **Anwendungssituationen funktionale Zusammenhänge** als Zuordnungen zwischen Zahlen bzw. Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie.	Ⓓ Entwicklung verschiedener allgemeiner mathematischer Kompetenzen, zum Beispiel in einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs Ⓓ Behandlung von Standardbeispielen für funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen, inklusive der entsprechenden Umwandlungen von Maßeinheiten Ⓑ Der Zusammenhang Weg-Zeit-Geschwindigkeit
BM 3.8	wenden entsprechend den obigen Ausführungen die in BM 3.1 bis BM 3.7 genannten Kompetenzen auf folgende **Funktionsklassen** an:	Ⓓ Diese Funktionsklassen bilden den Schwerpunkt aller Untersuchungen.

	• **Ganzrationale Funktionen** ○ kennen für Funktionsterme die **Normalform** (Polynom) und die **faktorisierte Form**, führen diese (falls möglich) rechnerisch ineinander über und interpretieren die Bedeutung für die Funktion. • **Exponentialfunktionen** mit den Funktionstermen $a \cdot b^x$ ○ deuten die Parameter mit Blick auf Anfangswert, Wachstumsfaktor, Wachstums- und Zerfallsrate, Verdopplungs- und Halbwertszeit.	Ⓓ Lineare, quadratische und exponentielle Funktionen bieten sich zur Modellierung von Wachstumsprozessen an. Ⓓ Die Thematisierung der Polynomdivision ist nicht gefordert.
BM 3.9	wenden entsprechend den obigen Ausführungen die in BM 3.1 bis BM 3.7 genannten Kompetenzen an auf: • **Trigonometrische Funktionen** mit den Funktionstermen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ○ verwenden Grad- und Bogenmaß. ○ kennen die Bedeutung der Begriffe Amplitude und Periode. kennen und verwenden die Beziehung $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$.	Ⓓ Trigonometrische Funktionen werden genutzt zur Modellierung periodischer Prozesse.
BM 3.10	wenden entsprechend den obigen Ausführungen die in BM 3.1 bis BM 3.7 genannten Kompetenzen an auf: • die **Wurzelfunktion** mit dem Funktionsterm $\sqrt{x}$, • die **gebrochenrationale Funktion** mit dem Term $\frac{1}{x}$. gehen mit **abschnittsweise definierten Funktionen** um und erkennen Sprungstellen.	Ⓓ Diese Funktionen sind nicht schwerpunktmäßig zu behandeln. Ⓑ Thematisierung von antiproportionalen Zusammenhängen

A 1	**Analysis 1: Einführung in die Differentialrechnung**	
A 1.1	beschreiben und interpretieren bei funktionalen Zusammenhängen **durchschnittliche Änderungsraten**, berechnen diese mit Hilfe von **Differenzenquotienten** und veranschaulichen sie als **mittlere Steigungen** mit **Sekanten** und **Steigungsdreiecken**.	Ⓑ Thematisierung verschiedener Anwendungssituationen (Geschwindigkeit, Steigung und Gefälle im Gelände, Bestandsänderung usw.)
A 1.2	verfügen über die folgenden, relevanten Grundvorstellungen der Differentialrechnung (lokale Änderungsrate, Tangentensteigung, lokale Linearität):	

	• erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den **Übergang von der durchschnittlichen Änderungsrate zur lokalen Änderungsrate.** • deuten die lokale Änderungsrate grafisch als **Tangente / Schmiegegerade**. erkennen qualitativ die **lokale Linearität von Funktionen** bzw. die **lokale Geradlinigkeit von Kurven**.	Ⓓ Bei vergrößertem Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion („Hineinzoomen“, „Funktionenmikroskop“) zeigt sich ein geradliniges Kurvenstück.
A 1.3	ermitteln an Beispielen die **lokale Änderungsrate** mit Hilfe des **Differentialquotienten** als Grenzwert von Differenzenquotienten. definieren die **lokale Änderungsrate** als die **Ableitung an einer Stelle**. deuten die Ableitung an einer Stelle **grafisch als Steigung der Tangente / Schmiegegeraden** an den Graphen im entsprechenden Punkt. definieren aus den Ableitungen an jeder Stelle die **Ableitungsfunktion**.	Ⓓ Es bieten sich einfache ganzrationale Funktionen an. Ⓓ Formalisierungen: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
A 1.4	berechnen **Steigungswinkel** von Tangenten. stellen die **Gleichungen von Tangenten** und **Normalen** auf.	Ⓓ $m = \tan(\alpha)$ Ⓓ,Ⓦ Behandlung des Newtonverfahrens bietet sich an (auch mit digitalen Werkzeugen).
A 1.5	verstehen **Zusammenhänge zwischen Graphen von Funktionen und ihren Ableitungen** und begründen diese unter Verwendung von Begriffen wie **Monotonie, Extrem- und Wendepunkt.** ordnen Graphen von Funktionen und Ableitungen einander zu. skizzieren zu einem Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion (**„grafisches Differenzieren“**).	
A 1.6	ermitteln Funktionsterme für **(höhere) Ableitungsfunktionen** analytisch unter Verwendung der **Potenz-, Summen- und Faktorregel** für • ganzrationale Funktionen, • die Wurzelfunktion mit dem Funktionsterm $\sqrt{x}$,	Ⓓ Nur Summen und solche Transformationen (vgl. BM 3.4) von Funktionstermen, deren Ableitungen mittels Potenz-, Summen und Faktorregel gebildet werden können.

	• die gebrochenrationale Funktion mit dem Funktionsterm $\frac{1}{x}$, • die Funktionen mit den Funktionstermen sin(x) und cos(x).	Ⓓ Für Funktionen mit den Funktionstermen sin(x) und cos(x) bietet sich grafisches Differenzieren an.
A 1.7	beschreiben **Monotonie** und **Krümmungsverhalten** mithilfe von Ableitungen.	
A 1.8	begründen **notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrem- und für Wendestellen** anschaulich aus der Betrachtung der Graphen zur Ausgangsfunktion und zu den Ableitungsfunktionen.	Ⓓ Neben Betrachtung höherer Ableitungen auch Vorzeichenwechsel-Kriterium
A 1.9	ermitteln **analytisch** lokale/globale **Extrempunkte, Wendepunkte** sowie **Sattelpunkte** als besondere Wendepunkte.	Ⓦ Auch unter Hinzunahme digitaler Mathematikwerkzeuge
A 1.10	betrachten **abschnittsweise definierte Funktionen** und untersuchen die Übergänge auf Übereinstimmung der Funktionswerte und Ableitungswerte (**Sprungfreiheit**, **Knickfreiheit**).	
A 1.11	nutzen und interpretieren **Ableitungen** in Anwendungssituationen.	Ⓑ Wachstums- und Zerfallsprozesse sowie periodische Vorgänge Ⓓ Vgl. die unter A 1.2 genannten Grundvorstellungen zur Differentialrechnung
A 1.12	ermitteln in Fällen ausgehend von vorgegebenen Eigenschaften einer Funktion deren Funktionsterm.	Ⓓ,Ⓑ „Steckbriefaufgaben“, z. B. bei einfachen ganzrationalen Funktionen und Funktionen mit dem Funktionsterm $a \cdot b^x$ Ⓓ Komplexere Beispiele erst in der Q-Phase Ⓓ Gauß-Algorithmus erst in der Q-Phase

3.2 Qualifikationsphase

Für die Qualifikationsphase formuliert der Bildungsplan inhaltsbezogene Kompetenzen mit den entsprechenden Ausprägungen für Grund- und Leistungskurse. Inhaltlich wird das Sachgebiet Analysis erweitert; die Sachgebiete Stochastik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie treten, Kompetenzen aus der Sekundarstufe I aufgreifend, neu hinzu. Inhaltsbezogene Kompetenzen, die nur für Leistungskurse relevant sind, sind mit „[LK: …]“ bezeichnet.

Sachgebiet Analysis (A)

Die Lernenden erweitern und vertiefen ihre in der Sekundarstufe I und in der Einführungsphase aufgebauten Vorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen und infinitesimalen Konzepten. Bei Letzteren tritt die Kumulation von Größen zu einer Gesamtbilanz hinzu. Damit und mit der Behandlung vielfältiger reeller Funktionsklassen sowie zusammengesetzter Funktionen werden die Lernenden befähigt, funktionale Zusammenhänge innerhalb und außerhalb der Mathematik zu identifizieren sowie zu modellieren.

	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Lernenden …	**Kommentare**
A 2	**Analysis 2: Einführung in die Integralrechnung**	
A 2.1	verfügen über die folgenden, relevanten Grundvorstellungen zum **Integralbegriff** (rekonstruierter Bestand, orientierter Flächeninhalt, Kumulationsvorstellung): • deuten das **bestimmte Integral** als aus Änderungen **(re-)konstruierten Bestand**. • interpretieren diesen (re-)konstruierten Bestand geometrisch als **Summe orientierter Flächeninhalte**. • deuten das bestimmte Integral auf der Grundlage eines propädeutischen **Grenzwertbegriffs als kumulierten Gesamteffekt** ○ **inhaltlich**, indem Änderungen in zunehmend kleinen Intervallen zu einem Gesamteffekt aufsummiert werden, ○ **geometrisch**, indem die Flächenbilanz als Summe einer zunehmend großen Zahl schmaler werdender orientierter Flächen entsteht, ○ **analytisch**, indem Summen von Produkten aus Funktionswerten und zunehmend kleinen Intervallbreiten gebildet werden.	Ⓓ,Ⓑ Thematisierung verschiedener Anwendungssituationen (Zuflussgeschwindigkeit und eingefülltes Volumen, Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf und zurückgelegte Strecke, Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie und Anzahl Infizierter usw.) Ⓓ [LK: Zur Grundvorstellung des Mittelwertes vgl. A 2.8]
A 2.2	ermitteln **bestimmte Integrale** mit Hilfe der in A 2.1 genannten Grundvorstellungen an einfachen Beispielen [LK: auch unter Verwendung von Ober- und Untersummen].	
A 2.3	bestimmen in einfachen Fällen **Integralfunktionen** und erkennen den Zusammenhang von Integrieren und Differenzieren. verstehen [LK: und beweisen] den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** und wenden ihn an.	Ⓓ,Ⓑ Z. B. für konstante, lineare und quadratische Funktionen Ⓓ Herangehensweise: obere Integrationsgrenze als Variable auffassen

A 2.4	ermitteln Funktionsterme für **Stammfunktionen** analytisch unter Verwendung der **Potenz-, Summen- und Faktorregel** für **ganzrationale Funktionen**. skizzieren zu einem Graphen einer Funktion den Graphen einer dazugehörigen Stammfunktion („**grafisches Integrieren**“).	
A 2.5	ermitteln **bestimmte Integrale** mithilfe von Stammfunktionen und numerisch unter Verwendung digitaler Werkzeuge. bestimmen **Integrationsgrenzen** zu vorgegebenen Integralwerten.	
A 2.6	beherrschen • **Rechenregeln für Integrationsgrenzen** (Intervalladditivität), • **Summen- und Faktorregel** (Linearität) für Integrale.	
A 2.7	ermitteln **Flächeninhalte** • zwischen Funktionsgraphen und achsenparallelen Geraden und • zwischen Funktionsgraphen mithilfe von bestimmten Integralen.	Ⓓ Beinhaltet den Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse
A 2.8	[LK: bestimmen mit Hilfe von Integralen **Mittelwerte** von Funktionswerten.]	
A 2.9	[LK: bestimmen Volumina von **Rotationskörpern** (Rotation nur um die Abszisse).]	
A 2.10	**modellieren** realitätsnahe Probleme und interpretieren dabei die **Bedeutung des Integrals und der Stammfunktion** in der jeweiligen **Anwendungssituation**.	

A 3	**Analysis 3:** **Fortführung der Analysis**	

A 3.1	kennen über die unter BM 3.8 bis BM 3.10 genannten **Funktionen** hinaus
	• **Natürliche Exponentialfunktionen** mit den Funktionstermen $a \cdot e^{k \cdot x}$.
	  ○ nutzen die besondere Eigenschaft der Zahl e und der natürlichen Exponentialfunktion sowie den Zusammenhang $b^x = e^{\ln(b) \cdot x}$ zum Wechseln der Basis.
	  ○ nutzen den natürlichen Logarithmus zum Lösen von Gleichungen.
	• Funktionen, deren Funktionsterme sich durch **elementare Verknüpfungen** (Summe, Produkt) und **Verkettungen** aus Termen der bekannten Funktionstypen ergeben.	

	• Funktionen mit Parametern. • [LK: Untersuchung des Scharcharakters von Funktionen mit Parametern.]	
A 3.2	[LK: kennen über die unter BM 3.8 bis BM 3.10 und A 3.1 genannten **Funktionen** hinaus • die **natürliche Logarithmusfunktion** mit dem Funktionsterm $\ln(x)$, • **natürliche Logarithmusfunktionen**, die durch die in BM 3.4 beschriebenen Transformationen aus der natürlichen Logarithmusfunktion mit dem Funktionsterm $\ln(x)$ hervorgehen, als Umkehrfunktionen von natürlichen Exponentialfunktionen.]	Ⓓ [LK: Natürliche Logarithmusfunktionen als zusätzlich zu untersuchende Funktionsklasse]
A 3.3	nutzen folgende Zusammenhänge zum **Differenzieren und Integrieren** für • die natürliche **Exponentialfunktion**: $\left(e^x\right)' = e^x$, • [LK: die **natürliche Logarithmusfunktion**: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$], • die **Sinusfunktion** und die **Kosinusfunktion**: $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$, • **Potenzfunktionen**: $(a \cdot x^r)' = r \cdot a \cdot x^{r-1}$ mit $a, r \in IR, r \neq 0$.	Ⓓ Formale Beweise sind nicht notwendig; es genügt eine heuristische Hinführung, beispielsweise durch grafisches Ableiten.
A 3.4	wenden über die unter A 1.6 genannten Regeln hinaus die **Produktregel** und die **Kettenregel** an, um Funktionsterme für **(höhere) Ableitungsfunktionen** analytisch zu ermitteln.	Ⓓ Thematisierung der Quotientenregel optional (zurückführbar auf Produkt- und Kettenregel) Ⓓ Die Ableitungsregeln müssen nicht formal bewiesen werden.
A 3.5	bilden **Stammfunktionen** für: • Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten, • verkettete Funktionen, deren innere Funktion linear ist (**Lineare Substitution**).	Ⓓ [GK: ohne Stammfunktion von $\frac{1}{x}$] Ⓑ Stammfunktionen für $3 \cdot e^{5 \cdot x+7}$, $2 \cdot \cos(2x+4)+7$ [LK: $2 \cdot \ln(5x+4)+7$]
A 3.6	wenden für die unter A 3.1 [LK: und A 3.2] genannten Funktionen die folgenden Verfahren an: • aus BM 3.2 bis BM 3.7	

	○ einem Argument den zugehörigen Funktionswert zuordnen und umgekehrt; Schnittpunkte von Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen bestimmen; Symmetriebetrachtungen; Transformationen von Funktionsgraphen und zugehörige Parameter; Verhalten im Unendlichen und Asymptoten; funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen. • aus A 1.4 bis A1.5, A 1.7 bis A 1.12 ○ Steigungswinkel von Tangenten sowie Tangenten- und Normalengleichungen ermitteln; Monotonie- und Krümmungsverhalten mithilfe von Ableitungen beschreiben; Betrachtungen zu Extrem- und Wendepunkten; Betrachtungen zu abschnittweise definierten Funktionen; Ableitungen in Anwendungssituationen; Bestimmung von Funktionstermen. • aus A 2.5 bis A 2.10 ○ Bestimmte Integrale unter Beachtung relevanter Rechenregeln ermitteln; Flächeninhalte [LK: sowie Mittelwerte und Volumina von Rotationskörpern] ermitteln; Integrale im Zusammenhang mit Anwendungssituationen.	Substitution (nur bei Gleichungen, die sich auf lineare oder quadratische Gleichungen reduzieren lassen Ⓑ Allgemeine Steckbriefaufgaben Ⓓ Keine ausführliche Untersuchung komplizierter gebrochen-rationaler Funktionen
A 3.7	[LK: über die unter A 3.6 genannten Verfahren hinaus: • nutzen die Technik der Substitution zur Lösung biquadratischer Gleichungen. • begründen Achsensymmetrien zu Parallelen zu den Koordinatenachsen. • begründen Punktsymmetrien zu beliebigen Punkten. • führen Spiegelungen an beliebigen waagerechten und senkrechten Achsen durch. • ermitteln Gleichungen von Ortskurven für geeignete parametrisierte Punkte. • bestimmen uneigentliche Integrale.]	Ⓓ Zusätzlich zu den in BM 1.2 genannten Techniken Ⓑ [LK: Beispiel: Ortskurve durch die Extrempunkte einer Funktionsschar]
A 3.8	untersuchen begrenzte Wachstums- und Zerfallsprozesse [LK: und logistische Wachstumsprozesse] in Anwendungssituationen. [LK: kennen Differentialgleichungen zur Untersuchung von exponentiellem, beschränktem und logistischem Wachstum: • stellen passende Differentialgleichungen auf. • weisen die Gültigkeit gegebener Differentialgleichungen nach.]	Ⓓ [LK: Verschiedene Termdarstellungen für logistisches Wachstum. Die Stammfunktionen für Funktionsterme zu logistischen Wachstumsprozessen werden nicht ermittelt, sondern nur nachgewiesen.]

Sachgebiet Stochastik (S)

Die Lernenden erweitern ihre stochastischen Kenntnisse aus der Sekundarstufe I. Sie vertiefen ihre statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Fähigkeiten zur Problemlösung, erfassen komplexe stochastische Prozesse und modellieren diese mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Lernenden führen mit den Mitteln der Stochastik Berechnungen aus und interpretieren ihre Ergebnisse in der Realität. Sie erweitern ihr Allgemeinwissen um komplexe stochastische Strategien und vertiefen so ihr Verständnis unserer technisierten Welt. Kompetenzen sollen in ausgewählten Beispielen in Anwendungskontexten wie Glücksspielen (Lotto, Würfeln, Glücksräder, Kartenspiele, Roulette), Informatik (Verschlüsselung und andere Algorithmen), Medizin (Ausbreitung ansteckender Krankheiten, Zulassung von Medikamenten), Biologie (Aussterbe- und Wachstumsprozesse), Wirtschaft (Fehler bei Produktionsprozessen), Politik (Wahlprognosen) und Soziologie (Auswertung von Umfragen) angewendet und vertieft werden.

Für Leistungskurse enthält das Modul S 2 (Stochastik 2: Die Binomialverteilung als spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung) die Kompetenzen S 2.4 SP (Schätzung von Parametern) und S 2.5 HY (Hypothesentests). Es handelt sich – gemäß den Leitideen der Bildungsstandards – um Alternativen, von denen mit Blick auf die Themenschwerpunkte der Abiturprüfung nur eine zu unterrichten ist.

	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Lernenden …	**Kommentare**
S 1	**Stochastik 1:** **Grundlagen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung**	
S 1.1	erweitern Ihr Verständnis für **Kombinatorik**, indem sie Wahrscheinlichkeiten und Anzahlmöglichkeiten für • Permutationen mit Wiederholungen, • Kombinationen ohne Wiederholung, • Permutationen ohne Wiederholung, • [LK: Kombinationen mit Wiederholung] ggf. mithilfe von **Binomialkoeffizienten** bestimmen.	Ⓓ Urnenmodelle • mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge • ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge • ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge • [LK: mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge] Ⓑ Urnenmodelle, Glücksräder, Spiele
S 1.2	erweitern ihre Statistik-Kenntnisse, indem sie • den **arithmetischen Mittelwert**, die **empirische Varianz** und die **empirische Standardabweichung** für verschiedene relative und absolute **Häufigkeitsverteilungen** bestimmen.	Ⓦ Auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge Ⓑ Siehe S 1.1

	• verschiedene Häufigkeitsverteilungen mithilfe der eingeführten Kenngrößen und Darstellungen auch mithilfe von Simulationen analysieren und vergleichen, um Chancen und Risiken in stochastischen Sachkontexten zu beurteilen.	
S 1.3	beschreiben und verwenden Zufallsexperimente. greifen je nach Situation auf angemessene Grundvorstellungen zum **Wahrscheinlichkeitsbegriff** (z. B. als **prognostische Erwartung**, als **relative Häufigkeit**, als **relativer Anteil**) zurück und erläutern im Rahmen des **empirischen Gesetzes der großen Zahlen**, dass die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit nur eine Schätzung der unbekannten Wahrscheinlichkeit darstellt.	
S 1.4	stellen **Vereinigungsmengen**, **Schnittmengen**, **Differenzmengen**, **Und-/Oder-Verknüpfungen** symbolisch und mit Diagrammen dar. verstehen und nutzen die grundsätzlichen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten im Sinne der **Axiome von Kolmogorow**. nutzen die **Summenregeln** und die **Komplementärregel** für Ereignisse, um Wahrscheinlichkeiten und **Gegenwahrscheinlichkeiten** zu ermitteln. untersuchen Ereignisse auf stochastische Abhängigkeit oder stochastische Unabhängigkeit.	Ⓑ Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis, Elementarereignis, Gegenereignis, unmögliches Ereignis, sicheres Ereignis Ⓓ Siehe auch S 1.7
S 1.5	stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen **diskreter Zufallsgrößen** mit Histogrammen dar und bestimmen dafür **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung**, um Chancen, Risiken und Prognosen in stochastischen Sachkontexten zu beurteilen.	Ⓑ Laplace-Verteilung als besondere Wahrscheinlichkeitsverteilung
S 1.6	erweitern ihre Kenntnisse über **mehrstufige** Zufallsexperimente mit verschiedenen Anwendungsbezügen, indem sie Wahrscheinlichkeiten mithilfe von **Baumdiagrammen** und **Vierfeldertafeln** ggf. mit **Parametern** darstellen und berechnen.	Ⓓ Pfadregeln
S 1.7	nutzen Baumdiagramme und Vierfeldertafeln, um **bedingte Wahrscheinlichkeiten** von Ereignissen zu erkennen, zu deuten und zu berechnen. nutzen Baumdiagramme und Vierfeldertafeln, um **stochastische Abhängigkeit** und **stochastische Unabhängigkeit** von Ereignissen zu erkennen, zu deuten und nachzuweisen.	Ⓓ Zur Visualisierung bieten sich Doppelbäume an.

	[LK: nutzen auch formal den **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit** und den **Satz von Bayes**.]	
S 1.8	entnehmen **Daten** aus Texten, Histogrammen, Tabellen und anderen Darstellungsformen, prüfen ihre Plausibilität mithilfe stochastischer Methoden, beurteilen wahrscheinlichkeitsbasierte Aussagen und ziehen selbst geeignete Schlüsse. erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** stochastische Zusammenhänge und wenden die in S 1.1 bis S 1.8 genannten Kompetenzen an.	

S 2	**Stochastik 2: Die Binomialverteilung als spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung**	
S 2.1	beurteilen die Anwendbarkeit der **Binomialverteilung** mit dem **Stichprobenumfang** (**n**) und der **Trefferwahrscheinlichkeit** (**p**) zur Modellierung von Zufallsexperimenten zur Übertragung von Eigenschaften einer **Stichprobe** auf die **Grundgesamtheit** und umgekehrt von Eigenschaften der Grundgesamtheit auf eine Stichprobe.	Ⓓ Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette
S 2.2	berechnen Wahrscheinlichkeiten und kumulierte Wahrscheinlichkeiten von **binomialverteilten Zufallsgrößen** auch mithilfe digitaler Werkzeuge und deuten die Faktoren im Term $\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. stellen Wahrscheinlichkeiten von Binomialverteilungen mit **Histogrammen** dar und visualisieren deren kumulierte Wahrscheinlichkeiten auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen.	Ⓦ Kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit digitalen Mathematikwerkzeugen sowohl unter Verwendung des Summenzeichens als auch mit speziellen Befehlen
S 2.3	bestimmen anhand von Bedingungen **Stichprobenumfang**, **Trefferwahrscheinlichkeit**, **Erwartungswert** (**μ**), **Standardabweichung** (**σ**) einer Binomialverteilung. vergleichen Binomialverteilungen miteinander in Bezug auf die Kenngrößen auch unter Verwendung von **Sigma-Regeln**. beurteilen damit Chancen, Risiken und Prognosen in stochastischen Sachkontexten.	Ⓓ Laplace-Bedingung empirisch einführen

S 2.4 SP	**Alternative SP (Schätzung von Parametern)** [LK: können in Sachkontexten für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen, d.h.: grenzen **Punktschätzungen** von **Intervallschätzungen** ab. bestimmen **Konfidenzintervalle** von **Sicherheitswahrscheinlichkeiten** auch unter Verwendung von **Sigma-Regeln**, um von der Gesamtheit auf die Stichprobe zu schließen. erstellen **Prognose** über zu erwartende relative Häufigkeiten auch mithilfe der Regeln über $\frac{X}{n}$-**Umgebungen** von p.]	Ⓑ Auswertung von Umfragen im Kontext von BNE oder vielfältigen Lebensentwürfen, Überprüfung von Ausschussproduktion und Produktionsmengen Ⓓ Für die Laplace-Bedingung siehe S 3.3.
S 2.5 HY	**Alternative HY (Hypothesentests)** [LK: beherrschen in Sachkontexten **einseitige** und **zweiseitige Signifikanztests** (**Hypothesentests**) für binomialverteile Zufallsgrößen, d.h.: formulieren **Hypothesen** (H_1) und entsprechende **Nullhypothesen** (H_0). bestimmen **Annahme**- und **Verwerfungsbereiche** für vorgegebene **Signifikanzniveaus** auch unter Verwendung von **Sigma-Regeln**, geben begründet **Entscheidungsregeln** an und untersuchen Entscheidungsfragen. erläutern den **Fehler 1. Art** (α-Fehler) und den **Fehler 2. Art** (β-Fehler) im Kontext und berechnen deren Wahrscheinlichkeiten.]	Ⓑ Auswertung von Umfragen im Kontext von BNE oder vielfältigen Lebensentwürfen, Überprüfung von Ausschussproduktion und Produktionsmengen Ⓓ Für die Laplace-Bedingung siehe S 3.3.
S 2.6	entnehmen **Daten** aus Texten, Histogrammen, Tabellen und anderen Darstellungsformen, prüfen ihre Plausibilität mithilfe stochastischer Methoden, beurteilen wahrscheinlichkeitsbasierte Aussagen und ziehen selbst geeignete Schlüsse. erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** stochastische Zusammenhänge und wenden die in S 2.1 bis S 2.6 genannten Kompetenzen an.	

S 3	**Stochastik 3:** **Normalverteilungen als Beispiel für stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen**	
S 3.1	[LK: stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen **stetiger Zufallsgrößen** mit stetigen Funktionen dar und bestimmen dafür • **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung**, um Chancen, Risiken und Prognosen in stochastischen Sachkontexten zu beurteilen. • Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe von **Integralen**.]	Ⓓ Nach der Einführung in die Integralrechnung
S 3.2	[LK: stellen die **Gaußsche Glockenkurve** grafisch dar, interpretieren sie als **Dichtefunktion** der **Standard-Normalverteilung**. verwenden **Normalverteilungen** der Form $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mit ihren Kenngrößen als mathematisches Modell zur Beschreibung stetiger Zufallsgrößen.]	Ⓦ Auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen und Simulationen
S 3.3	[LK: beurteilen die Approximierbarkeit der Binomialverteilung durch die Normalverteilung auf Basis der **Laplace-Bedingung**.]	
S 3.4	[LK: nutzen **σ-Umgebungen** oder die **Dichtefunktion** der **Normalverteilung** zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei • Konfidenzintervallen (Alternative S 2.4 SP) oder • Signifikanztests (Alternative S 2.5 HY).]	
S 3.5	[LK: entnehmen **Daten** aus Texten, Histogrammen, Tabellen und anderen Darstellungsformen, prüfen ihre Plausibilität mithilfe stochastischer Methoden, beurteilen wahrscheinlichkeitsbasierte Aussagen und ziehen selbst geeignete Schlüsse. erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** stochastische Zusammenhänge und wenden die in S 3.1 bis S 3.5 genannten Kompetenzen an.]	

Sachgebiet Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Das Sachgebiet Lineare Algebra / Analytische Geometrie beinhaltet – gemäß den Leitideen der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife – die zwei alternativ zu unterrichtenden Schwerpunkte Lineare Algebra (LA) und Analytische Geometrie (AG). Die Leitideen geben dabei auch solche Inhalte vor, die Gegenstand beider Schwerpunkte sind. Es handelt sich hierbei im Wesentlichen um das Lösen von Gleichungssystemen, um die Behandlung von Vektoren in einfachen geometrischen Zusammenhängen und um die Beschreibung von einfachen Sachverhalten mit Tupeln oder Matrizen. Diese gemeinsamen Inhalte sind im Folgenden zweifach in inhaltsbezogene Kompetenzen ausdifferenziert, einmal für den Unterricht im Schwerpunkt Lineare Algebra und einmal für den Unterricht im Schwerpunkt Analytische Geometrie. Für den Schwerpunkt Lineare Algebra finden sie sich in den Modulen LA 1 (Vektoren in geometrischen Zusammenhängen für den Schwerpunkt LA) und LA 2 (Lineare Gleichungssysteme und Matrizenkalkül für den Schwerpunkt LA), für den Schwerpunkt Analytische Geometrie in den Modulen AG 1 (Lineare Gleichungssysteme und Matrizenkalkül für den Schwerpunkt AG) und AG 2 (Vektoren in geometrischen Zusammenhängen für den Schwerpunkt AG). Die Lernenden legen durch die sich überschneidenden Modulinhalte Grundlagen in beiden Sachgebieten, vertiefen damit ihr Fachwissen, aber auch ihr Allgemeinwissen und entwickeln Studierfähigkeit in Studiengängen, die auf diese Inhalte zurückgreifen. Auch die gemeinsamen Inhalte und die zugeordneten inhaltsbezogenen Kompetenzen können Gegenstand der Abiturprüfung sein.

Schwerpunkt Lineare Algebra (LA)

Die Lernenden erweitern ihre algebraischen Kenntnisse aus der Sekundarstufe I. Sie vertiefen ihre rechnerischen Fähigkeiten zur Problemlösung, erfassen komplexe dynamische Prozesse und modellieren diese mit Matrizen und Vektoren. Sie führen mit den Mitteln der Linearen Algebra algorithmisch Berechnungen aus und interpretieren ihre Ergebnisse in der Realität. Sie erweitern ihr Allgemeinwissen um komplexe algebraische Strategien und wenden ihre Kenntnisse in ausgewählten Beispielen aus Anwendungskontexten wie Wirtschaft (Produktionsprozesse, Input-Output-Analyse, Leontief-Modell), Demographie (Stadtentwicklung, Wählerwanderung) und Biologie (Populationsdynamik, Räuber-Beute-Modell) an.

	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Lernenden …	**Kommentare**
LA 1	**Lineare Algebra 1: Vektoren in geometrischen Zusammenhängen für den Schwerpunkt LA**	
LA 1.1	definieren Vektoren als reelles **Zahlentupel** und verfügen im zwei- bzw. dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem über geometrische Vorstellungen von Vektoren in folgenden Kontexten: • **Ortsvektor** eines Punktes, • **Verbindungsvektor** zwischen Punkten, • **Verschiebungspfeil** mit Richtung, Länge und Orientierung (Pfeilklasse) und interpretieren Vektoren als **gerichtete Größen**.	Ⓓ Deutung als Geschwindigkeit oder Kraft
LA 1.2	**zeichnen** mathematische Objekte mit Hilfe von Punkten im zwei- und dreidimensionalen **Koordinatensystem** und interpretieren gezeichnete Objekte.	Ⓑ Vektoren, Strecken, Geraden, Vielecke, Prismen, Kegel und Pyramiden

		Ⓦ gegebenenfalls auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen
LA 1.3	**addieren** und **subtrahieren** Vektoren, **multiplizieren** Vektoren **mit** einem **Skalar**.	
LA 1.4	nutzen und deuten **Linearkombinationen** von Vektoren zur Lösung geometrischer Problemstellungen. untersuchen zwei Vektoren auf **Kollinearität** und deuten diese geometrisch.	Ⓓ Vektorketten/Vektorzüge Ⓑ Streckenteilungen, Schwerpunkt von Dreiecken und Nachweis von Parallelogrammen
LA 1.5	berechnen den **Betrag** eines Vektors und deuten diesen geometrisch.	Ⓑ Länge von Strecken, Abstand zweier Punkte und Nachweis gleichschenkliger, gleichseitiger, ähnlicher sowie kongruenter Dreiecke
LA 1.6	berechnen das **Skalarprodukt** zweier Vektoren und nutzen dies, um • Winkel als spitz, stumpf oder rechten Winkel zu identifizieren. • **Winkelgrößen** zu berechnen.	Ⓑ Prüfung auf Orthogonalität und Nachweis von speziellen Vierecken ((symmetrisches) Drachenviereck, Parallelogramm, (symmetrisches) Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat) Ⓓ Die trigonometrischen Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck bieten sich an, um die Winkelgrößenberechnung einzuführen.
LA 1.7	erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** geometrische Zusammenhänge und wenden die in LA 1.1 bis LA 1.6 genannten Kompetenzen an.	

LA 2	**Lineare Algebra 2:** **Lineare Gleichungssysteme (LGS) und Matrizenkalkül für den Schwerpunkt LA**	
LA 2.1	ermitteln **Lösungsmengen** für LGS (auch mit Parametern) mit keiner, einer oder unendlich vielen Lösungen, nutzen dabei verschiedene Lösungsverfahren. wenden als systematisches Verfahren den **Gauß-Algorithmus** an und erläutern die zugrunde liegenden Äquivalenzumformungen.	Ⓦ Ohne digitale Mathematikwerkzeuge nur LGS, die mit überschaubarem Aufwand zu lösen sind.

	erkennen **unter- und überbestimmte LGS** und reduzieren diese gegebenenfalls.	
LA 2.2	fassen $m \times n$-**Matrizen** als Tabellen mit n Zeilen und m Spalten und **Vektoren** als Matrizen mit nur einer Spalte auf.	
LA 2.3	**addieren** und **subtrahieren** Matrizen, **multiplizieren** Matrizen mit einem **Skalar**. beherrschen die **Multiplikation von Matrizen,** erkennen diese als **nicht kommutativ** und bestimmen **Inverse** zu $m \times n$-Matrizen. **multiplizieren** Matrizen **mit Vektoren**.	Ⓦ Ohne digitale Mathematikwerkzeuge sind Inverse nur für $n = 2$ zu bestimmen.
LA 2.4	fassen Matrizen und Vektoren als Datenspeicher auf. nutzen **LGS** auch in Form von **Matrix-Vektor Gleichungen** zur Lösung von Problemstellungen in **einfachen Anwendungssituationen**.	Ⓑ Codieren und Einkaufszenarien sowie Steckbriefaufgaben der Analysis Ⓓ Auch erweiterte Koeffizientenmatrizen verwenden
LA 2.5	bestimmen zu gegeben **Eigenwerten** die passsenden **Eigenvektoren** von $n \times n$-Matrizen. bestimmen zu gegeben Eigenvektoren die passsenden Eigenwerte von $n \times n$-Matrizen.	
LA 2.6	[LK: bestimmen **charakteristische Polynome** von 2×2-Matrizen. bestimmen Eigenwerte von $n \times n$-Matrizen mithilfe gegebener charakteristischer Polynome und erkennen den **dominanten Eigenwert**.]	
LA 2.7	stellen Produktionsverflechtungen in **Verflechtungsdiagrammen** (Gozintographen) dar, beschreiben diese mithilfe von **Übergangsmatrizen** und deuten die Matrizenelemente sachgerecht als Ressourcenmengen. untersuchen Produktionsverflechtungen mit **Matrix-Vektorgleichungen**.	Ⓑ Berechnung von Ressourcen-, Zwischenprodukt- und Endproduktmengen. Bestimmung von Übergangsmatrizen mithilfe gegebener Mengen

LA 3	**Lineare Algebra 3: Iterative Prozesse: Umverteilungen**	
LA 3.1	modellieren **Umverteilungen** als iterative Prozesse: • stellen diese in **Übergangsdiagrammen** dar.	

	• beschreiben diese mithilfe von **stochastischen Matrizen**. • deuten Matrizenelemente sachgerecht als **Übergangswahrscheinlichkeiten.**	
LA 3.2	bestimmen, überprüfen und deuten Vektoren, die **nachfolgende** und **vorausgehende Zustände** beschreiben unter Verwendung von • Matrix-Multiplikationen, • Matrix-Potenzen, • Inversen, • Gleichungssystemen.	Ⓦ Auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen
LA 3.3	bestimmen, überprüfen und deuten Vektoren, die **prozentuale Zustandsverteilungen** beschreiben.	Ⓓ Normierte Vektoren mit der Spaltensumme 1
LA 3.4	bestimmen, überprüfen und deuten **Fixvektoren**, die **stationäre Zustände** beschreiben.	
LA 3.5	untersuchen das **Langzeitverhalten für Umverteilungen**. bestimmen und deuten **Grenzvektoren** und **Grenzmatrizen** für Umverteilungen.	Ⓓ Grenzmatrix sowohl näherungsweise mit Matrixpotenzen als auch exakt als stochastische Matrix mit identischen Spalten mithilfe des Fixvektors ermitteln
LA 3.6	**vergleichen**, **validieren** und **modifizieren Modelle** auch unter Berücksichtigung zusätzlicher Einflussgrößen und operieren sachgerecht **mit zusätzlichen Parametern.**	Ⓓ Untersuchungen im Kontext von BNE oder vielfältigen Lebensentwürfen

LA 4	**Lineare Algebra 4:** **Iterative Prozesse: Populationsentwicklungen**	
LA 4.1	modellieren **Populationsentwicklungen** als iterative Prozesse: • stellen diese in **Übergangsdiagrammen** dar. • beschreiben diese mithilfe von **Populationsmatrizen**. • deuten Matrizenelemente sachgerecht als **Überlebens-** und **Reproduktionsraten**.	Ⓓ Populationsmatrizen, die nur ein Element je Zeile und Spalte enthalten, beschreiben zyklische Populationsentwicklungen.
LA 4.2	bestimmen, überprüfen und deuten Vektoren, die **nachfolgende** und **vorausgehende Zustände** beschreiben unter Verwendung von	Ⓦ Auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen

	• Matrix-Multiplikationen, • Matrix-Potenzen, • Inversen, • Gleichungssystemen.	
LA 4.3	bestimmen, überprüfen und deuten Vektoren, die **prozentuale Zustandsverteilungen** beschreiben.	Ⓓ Normierte Vektoren mit der Spaltensumme 1
LA 4.4	bestimmen, überprüfen und deuten **Fixvektoren**, die **stationäre Zustände** beschreiben.	
LA 4.5	bestimmen, überprüfen und deuten **Wachstumsfaktoren** sowie **Wachstumsraten**, die die (**prozentuale) Zunahme** oder **Abnahme** zwischen verschiedenen Zuständen beschreiben.	
LA 4.6	untersuchen das **Langzeitverhalten für Populationsentwicklungen.** beschreiben **zerfallende**, **konvergierende** und **expandierende** Populationsentwicklungen. unterscheiden **zyklische** und **stabile** Populationsentwicklungen.	Ⓦ Langzeitverhalten hier nur mit digitalen Mathematikwerkzeugen untersuchen (vgl. LK LA 4.9) Ⓓ Auch zyklische Populationsentwicklungen können langfristig expandieren oder zerfallen.
LA 4.7	bestimmen und deuten **zyklische Wachstumsfaktoren** für zyklische Populationsmatrizen.	Ⓓ Wachstumsfaktoren sowohl mithilfe von Übergangsdiagrammen als auch mithilfe von Matrix-Potenzen bestimmen
LA 4.8	Deuten **Eigenwerte** von stabilen Populationsmatrizen als **stabile Wachstumsfaktoren** und die zugehörigen **Eigenvektoren** als **stabile Zustände**. berechnen und deuten **stabile prozentuale Zustandsverteilungen**.	
LA 4.9	[LK: stellen beliebige Zustände als **Linearkombination aus Eigenvektoren** von stabilen Populationsmatrizen dar. untersuchen das **Langzeitverhalten für Populationsentwicklungen** ausgehend von beliebigen Zuständen mithilfe von Eigenwerten und Linearkombinationen aus Eigenvektoren.	

	überprüfen und deuten die Existenz von **Grenzvektoren** und **Grenzmatrizen** für stabile Populationsmatrizen.]	
LA 4.10	beschreiben und untersuchen Populationsentwicklungen mit einfachen **Exponentialfunktionen** der Form $a \cdot b^x$ im Vergleich zur Betrachtung mit Vektoren und Matrizen.	Ⓓ Vgl. Grundlagen zu Funktionen: BM 3.8
LA 4.11	**vergleichen**, **validieren** und **modifizieren Modelle** auch unter Berücksichtigung zusätzlicher Einflussgrößen und operieren sachgerecht **mit zusätzlichen Parametern**.	Ⓓ Untersuchungen im Kontext von BNE oder vielfältigen Lebensentwürfen

Schwerpunkt Analytische Geometrie (AG)

Die Lernenden erweitern ihre geometrischen Kenntnisse aus der Sekundarstufe I. Sie vertiefen ihr räumliches Vorstellungsvermögen, erfassen komplexe geometrische Sachverhalte und koordinatisieren diese in Ebene und Raum. Sie führen mit den Mitteln der Analytischen Geometrie Berechnungen aus und interpretieren sie in Koordinatensystemen und im Rahmen von Modellen. Sie erweitern ihr Allgemeinwissen um komplexe geometrische Strategien und wenden ihre geometrischen Kenntnisse in ausgewählten Beispielen sowohl innermathematisch als auch in Anwendungskontexten wie Architektur (Gebäude, Brücken), Physik, Maschinenbau (Roboterbewegung) und 3D-Animation an.

	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Lernenden ...	**Kommentare**
AG 1	**Analytische Geometrie 1:** **Lineare Gleichungssysteme (LGS) und Matrizenkalkül für den Schwerpunkt AG**	
AG 1.1	ermitteln **Lösungsmengen** für LGS (auch mit Parametern) mit keiner, einer oder unendlich vielen Lösungen, nutzen dabei verschiedene Lösungsverfahren. wenden als systematisches Verfahren den **Gauß-Algorithmus** an und erläutern die zugrunde liegenden Äquivalenzumformungen. vergleichen Lösungsverfahren für LGS in verschiedenen Schreibweisen (als einzelne Gleichungen, als Gleichungssystem, als erweiterte Koeffizientenmatrix). erkennen **unter- und überbestimmte LGS** und reduzieren überbestimmte LGS gegebenenfalls.	Ⓦ Ohne digitale Mathematikwerkzeuge nur LGS, die mit überschaubarem Aufwand zu lösen sind Ⓑ Codieren und Einkauf-Szenarien sowie Steckbriefaufgaben der Analysis

AG 2	**Analytische Geometrie 2:** **Vektoren in geometrischen Zusammenhängen für den Schwerpunkt AG**	
AG 2.1	definieren Vektoren als reelles **Zahlentupel** und verfügen im zwei- bzw. dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem über geometrische Vorstellungen von Vektoren in folgenden Kontexten: • **Ortsvektor** eines Punktes, • **Verbindungsvektor** zwischen Punkten, • **Verschiebungspfeil** mit Richtung, Länge und Orientierung (Pfeilklasse) und interpretieren Vektoren als **gerichtete Größen**.	Ⓑ Deutung als Geschwindigkeit oder Kraft
AG 2.2	**zeichnen** mathematische Objekte mit Hilfe von Punkten im zwei- und dreidimensionalen **Koordinatensystem** und interpretieren gezeichnete Objekte.	Ⓑ Vektoren, Strecken, Geraden, Vielecke, Prismen, Kegel und Pyramiden Ⓦ Gegebenenfalls auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen
AG 2.3	**addieren** und **subtrahieren** Vektoren, **multiplizieren** Vektoren **mit** einem **Skalar**.	
AG 2.4	nutzen und deuten **Linearkombinationen** von Vektoren zur Lösung geometrischer Problemstellungen. untersuchen zwei Vektoren auf **Kollinearität** und deuten diese geometrisch. [LK: untersuchen Vektoren auf **lineare Abhängigkeit** und deuten diese geometrisch.]	Ⓓ Vektorketten/Vektorzüge Ⓑ Streckenteilungen, Schwerpunkt von Dreiecken und Nachweis von Parallelogrammen
AG 2.5	berechnen den **Betrag** eines Vektors und deuten diesen geometrisch. normieren einen Vektor zu einem **Einheitsvektor**.	Ⓑ Länge von Strecken, Abstand zweier Punkte und Nachweis gleichschenkliger, gleichseitiger, ähnlicher sowie kongruenter Dreiecke
AG 2.6	berechnen das **Skalarprodukt** zweier Vektoren und nutzen dies, um • Winkel als spitz, stumpf oder rechten Winkel zu identifizieren. • **Winkelgrößen** zu berechnen. • [LK: die Länge der **Projektion** eines dieser Vektoren auf den anderen zu berechnen.]	Ⓑ Prüfung auf Orthogonalität und Nachweis von speziellen Vierecken ((symmetrisches) Drachenviereck, Parallelogramm, (symmetrisches) Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat)

		Ⓓ Die trigonometrischen Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck bieten sich an, um die Winkelgrößenberechnung einzuführen.
AG 2.7	berechnen das **Vektorprodukt** zweier Vektoren und nutzen dies, um • einen zu den ursprünglichen Vektoren orthogonalen Vektor zu ermitteln, • Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken zu bestimmen.	Ⓓ Flächenberechnungen sind mit dem Vektorprodukt schnell durchführbar.
AG 2.8	erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** geometrische Zusammenhänge und wenden die in AG 2.1 bis AG 2.7 genannten Kompetenzen an.	

AG 3	**Analytische Geometrie 3:** **Geraden**	
AG 3.1	stellen Geraden und Strecken vektoriell mittels **Stütz- und Richtungsvektor** mit Gleichungen in **Parameterform** bzw. in Form **parametrisierter Punkte** dar. stellen **Geradenscharen** mit Gleichungen dar. **veranschaulichen** Geraden und Strecken mittels Stütz- und Richtungsvektor. geben **Geraden- und Streckenpunkte** an und führen **Punktproben** durch.	Ⓓ Durch Einschränkung des Definitionsbereichs des Parameters werden Geraden zu Strecken. Ⓑ Gerade in Form eines parametrisierten Punktes: $P_t\left(3+4t\middle|2+t\middle|4-2t\right)$
AG 3.2	berechnen und erkennen **Spurpunkte** von Geraden und erkennen **besondere Lagen** von Geraden im Koordinatensystem.	
AG 3.3	untersuchen die **Lagebeziehung zweier Geraden:** • identisch, • echt parallel, • windschief, • sich schneidend und berechnen gegebenenfalls den **Schnittpunkt**.	
AG 3.4	nutzen Geraden und Geradenscharen zur Darstellung von Flächen und Körpern. erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** geometrische Zusammenhänge und wenden die in AG 3.1 bis AG 3.3 genannten Kompetenzen an.	Ⓑ Geradlinige Bewegungen (bei Flugzeugen usw.)

		Ⓑ Geometrische Objekte (innermathematisch und in der Architektur usw.) Ⓑ Physikalische Objekte (Lichtstrahlen, Schattenwurf usw.)

AG 4	**Analytische Geometrie 4: Ebenen**	
AG 4.1	stellen Ebenen mit Gleichungen in **Koordinatenform**, in **Parameterform** [LK: und in **Normalenform**] dar. überführen Gleichungsformen von Ebenen ineinander. stellen **Ebenenscharen** mit Gleichungen dar. veranschaulichen Ebenen mittels • **(Spur-)Punkten**, • **Stützvektor** und **Spannvektoren**, • **Stützvektor** und **Normalenvektor**. geben Punkte in **Ebenen, Flächen** und **Körpern** an und führen **Punktproben** durch.	Ⓓ Die Verwendung von Vektor- und Skalarprodukt ist bei der Überführung von Formen von Ebenengleichungen sinnvoll. Ⓦ Digitale Mathematikwerkzeuge zur Konstruktion von dreidimensionalen Objekten nutzen und unterschiedliche digital erzeugte Darstellungen untereinander und mit realen Objekten vergleichen
AG 4.2	erkennen und berechnen **Spurpunkte** [LK: und **Spurgeraden]** von Ebenen und erkennen **besondere Lagen** von Ebenen im Koordinatensystem.	
AG 4.3	untersuchen die **Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene**: • echt parallel, • die Gerade liegt in der Ebene, • die Gerade durchstößt die Ebene und berechnen gegebenenfalls den **Durchstoßpunkt**. untersuchen die **Lagebeziehungen zweier Ebenen**: • identisch, • echt parallel, • sich schneidend.	Ⓓ Es bietet sich an, eine Ebene in Parameterform vor der Untersuchung von Lagebeziehungen in Koordinatenform zu überführen und mit Normalenvektor und Punktprobe zu arbeiten. Ⓓ Wird die Gerade als parametrisierter Punkt aufgefasst, entspricht die Untersuchung der Lagebeziehung einer Punktprobe.

		Ⓓ Die Kenntnis der Lagebeziehung dient auch der Berechnung eines Schnittwinkels [LK: und von Abständen], siehe AG 5.2 und AG 5.3.
AG 4.4	stellen Gleichungen von Geraden und Ebenen auf, die parallel oder orthogonal zu gegebenen Geraden oder Ebenen sind.	
AG 4.5	nutzen Ebenen und Ebenenscharen zur Darstellung von Flächen und Körpern. erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** geometrische Zusammenhänge und wenden die in AG 4.1 bis AG 4.5 genannten Kompetenzen an.	Ⓓ Innermathematische Betrachtungen und Berechnungen zu ebenen Figuren (z. B. Vielecken und Kreisen) und Körpern (z. B. geraden und schrägen Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln sowie Kugeln) Ⓓ Es sind keine vektoriellen Darstellungen von Kugeln gefordert. Ⓑ Landschaftsplanung und Architektur Ⓑ Physikalische Objekte

AG 5	**Analytische Geometrie 5: Projektionen, Spiegelungen, Abstände und Winkel**	
AG 5.1	führen **Projektionen** von Punkten und Geraden auf Koordinatenebenen durch. führen **Spiegelung** von Punkten [LK: und Geraden] an Ebenen durch.	Ⓦ Projektionen und Spiegelungen auch mit dynamischer Geometriesoftware
AG 5.2	berechnen **Abstände** • zwischen zwei Punkten, • von einem Punkt zu einer Ebene mit Hilfsgerade [LK: und Abstandsformel], [LK: • von einer Geraden zu einer Ebene mit Hilfsgerade, • von einer Ebene zu einer Ebene mit Hilfsgerade, • von einem Punkte zu einer Geraden mit Hilfsebene, • von einer Geraden zu einer Geraden mit Hilfsebene.]	Ⓓ Objekte können auch mit Parametern gegeben sein. Ⓓ [LK: Es bietet sich an, Abstandsberechnungen auch auf die Formel für den Abstand von einem Punkt zu einer Ebene zurückzuführen.]

		Ⓓ, Ⓦ [LK: Abstände auch durch Minimierung einer Abstandsfunktion, gegebenenfalls mit digitalen Mathematikwerkzeugen]
AG 5.3	berechnen Winkelgrößen zwischen • zwischen zwei Geraden, • zwischen einer Geraden und einer Ebene, • zwischen zwei Ebenen.	Ⓓ Winkelgröße zwischen zwei Vektoren siehe AG 2.6 Ⓓ Parallelität und Orthogonalität
AG 5.4	erkennen, erläutern und beurteilen in **Anwendungssituationen** geometrische Zusammenhänge und wenden die in AG 5.1 bis AG 5.5 genannten Kompetenzen an.	Ⓑ Überprüfung spezifischer Eigenschaften und Konstruktionen zu ebenen Figuren und geometrischen Körpern Ⓑ Bewegungen im zwei- und dreidimensionalen Raum Ⓑ Konstruktion von Bauteilen/Maschinen Ⓑ Architektur

4. Leistungsbewertung

Die Dokumentation und Beurteilung der individuellen Entwicklung des Lern- und Leistungsstandes der Lernenden berücksichtigt nicht nur die Produkte, sondern auch die Prozesse schulischen Lernens und Arbeitens. Die Leistungsbewertung dient der Rückmeldung für Lernende, Erziehungsberechtigte und Lehrkräfte. Sie ist eine Grundlage verbindlicher Beratung sowie der Förderung der Lernenden. Mit Beginn der Qualifikationsphase wird die Leistungsbewertung Teil der Gesamtqualifikation des Abiturs und Grundlage für die Zulassung zur Abiturprüfung.

Prinzipiell zu unterscheiden sind Lern- und Leistungssituationen: In Lernsituationen wird die Intensität der konstruktiven Auseinandersetzung mit fachlichen Fehlern beurteilt. Fachliche Fehler werden hier nicht als Defizite, sondern als Quelle für die fachliche Weiterentwicklung angesehen. In Leistungssituationen hingegen gehen Quantität und Qualität fachlicher Fehler direkt in die Leistungsbeurteilung ein.

Grundsätze der Leistungsbewertung:

- Bewertet werden die im Unterricht und für den Unterricht erbrachten Leistungen der Lernenden.
- Die Leistungsbewertung findet mit Blick auf den Erwerb der zum jeweiligen Unterrichtsabschnitt gehörenden Kompetenzen unter Berücksichtigung der Anforderungsbereiche statt.
- Die Leistungsbewertung muss für Lernende sowie Erziehungsberechtigte transparent sein, die Kriterien der Leistungsbewertung müssen zu Beginn des Beurteilungszeitraums bekannt sein.
- Die Kriterien für die Leistungsbewertung und die Gewichtung zwischen den beiden untengenannten Beurteilungsbereichen werden in der Fachkonferenz festgelegt – im Rahmen der Vorgaben der Verordnung über die Gymnasiale Oberstufe.

Die beiden notwendigen Beurteilungsbereiche sind:

(1) schriftliche Arbeiten unter Aufsicht und ihnen gleichgestellte Arbeiten und

(2) die laufende Unterrichtsarbeit.

Für beide Bereiche werden Noten festgelegt. Die Gesamtnote darf sich nicht überwiegend auf die Ergebnisse des ersten Beurteilungsbereichs stützen.

(1) Schriftliche Arbeiten unter Aufsicht und ihnen gleichgestellte Arbeiten

Schriftliche Arbeiten unter Aufsicht (Klausuren) dienen der Überprüfung der Lernergebnisse eines Unterrichtsabschnittes. Weiter können sie zur Unterstützung kumulativen Lernens auch der Vergewisserung über die Nachhaltigkeit der Lernergebnisse zurückliegenden Unterrichts dienen. Sie geben Aufschluss über das Erreichen der Ziele des Unterrichts, sowohl der inhaltsbezogenen als auch der prozessbezogenen Kompetenzen. Im Verlauf der Gymnasialen Oberstufe sollen sich die Klausuren in ihren Anforderungen zunehmend inhaltlich und formal an den Anforderungen der schriftlichen Abiturprüfung orientieren. Dies betrifft in formaler Hinsicht:

- die Formulierung der Aufgabenstellungen unter Verwendung der Operatoren, wie sie in Anhang A.1 beschrieben sind und der mathematischen Schreibweisen, wie sie in Anhang A.2 beschrieben sind;
- die Verteilung der Bewertungseinheiten auf Aufgaben;
- die Berücksichtigung der Anforderungsbereiche;

- die Verwendung von Hilfsmitteln.

(2) Laufende Unterrichtsarbeit

Dieser Beurteilungsbereich umfasst alle von den Lernenden außerhalb der schriftlichen Arbeiten unter Aufsicht und den ihnen gleichgestellten Arbeiten erbrachten Unterrichtsleistungen. Dazu gehören beispielsweise

- die Qualität und Quantität der mündlichen und schriftlichen Mitarbeit unter Berücksichtigung der auf den Leitideen fußenden inhaltsbezogenen Kompetenzen, der prozessbezogenen Kompetenzen und der Kompetenzen zur Bildung in der digitalen Welt;
- die selbstständige Bearbeitung von Übungsaufgaben im Unterricht in Einzel- oder Partnerarbeit;
- die Beteiligung bei Gruppenarbeit;
- die Güte der Kommunikation, mit der sich Lernende auf fachliche Inhalte und Gedankengänge anderer beziehen, diese aufgreifen, korrigieren oder weiterentwickeln;
- die Mitarbeit in Unterrichtsprojekten (z. B. mit gemeinsamem Produkt, gemeinsamer Präsentation, schriftlicher Prozessdokumentation);
- Arbeitsprodukte aus dem Unterricht wie Lerntagebücher oder Portfolios;
- Hausaufgaben;
- längerfristig gestellte häusliche Arbeiten (z. B. Referate oder kleinere Facharbeiten);
- Präsentationen und Präsentationstechniken;
- Auswahl und Umgang mit geeigneten Medien.

Anhang A.1

Operatoren für das Fach Mathematik in der Gymnasialen Oberstufe

Operatoren für das Fach Mathematik in der Gymnasialen Oberstufe

Die standardisierten Arbeitsaufträge (Operatoren) werden in der folgenden Tabelle aufgeführt und erläutert. Diese Operatoren werden im Unterricht eingeführt. Sie signalisieren den Lernenden, welche Tätigkeiten sie bei der Erledigung von Arbeitsaufträgen ausführen sollen und welche beim Lösen von Klausuren und Prüfungsaufgaben von ihnen erwartet werden.

Operatoren können durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht.

Die Verwendung eines Operators, der im Folgenden nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Operatoren	Erläuterungen	Beispiele
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.	Geben Sie zwei Punkte an, die in der Ebene E liegen. Nennen Sie ein Beispiel zu…
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.	Entscheiden Sie, bei welchem Histogramm es sich nicht um eine Binomialverteilung handelt.
beurteilen	Das Urteil wird unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formuliert und begründet.	Beurteilen Sie, mit welcher der beiden vorgeschlagenen Funktionen der Sachverhalt besser modelliert wird.
erstellen	Die Erstellung erfolgt zu einem Sachverhalt, zumeist in fachlich üblicher oder vorgegebener Form (z. B. Wertetabelle, Grafik, Diagramm).	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.	Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des gesuchten Punktes P.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.	F ist eine Stammfunktion von f. Erläutern Sie den Verlauf des Graphen von F in Abhängigkeit vom Verlauf des Graphen von f.

veranschaulichen	Die Veranschaulichung von mathematischen Sachverhalten oder berechneten Werten erfolgt zum Beispiel durch Schraffuren, Markierungen, Graphen oder Baumdiagramme.	Veranschaulichen Sie den Wert des bestimmten Integrals in der Abbildung des Graphen von f.
interpretieren, deuten	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her, beispielsweise zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.	Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. Deuten Sie den Term im Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.	Begründen Sie, dass der Graph von f nicht mehr als einen Wendepunkt haben kann. Weisen Sie nach, dass für den Erwartungswert $E(X)$ gilt: $E(X) < 3$. Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
prüfen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen oder zu widerlegen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.	Prüfen Sie, ob der Punkt P in der Ebene E liegt.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. Die Verwendung grafischer Verfahren ist ausgeschlossen.	Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f. (Es ist nicht zulässig, die Koordinaten aus dem Graphen von f abzulesen. Gleichwohl kann nach dem Ansatz $f'(x) = 0$ diese Gleichung mithilfe eines Rechners gelöst werden, sofern er zugelassen ist und nicht durch einen Zusatz zum Operator ausgeschlossen wird.)
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.	Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f. (Die Bestimmung kann rechnerisch oder grafisch erfolgen, auch mit dem Taschenrechner, falls keine weiteren Einschränkungen bestehen.)

untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.	Untersuchen Sie, wie viele rote Kugeln die Urne mindestens enthält. Untersuchen Sie, ob die Graphen von f und g knickfrei ineinander übergehen.
herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen muss nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhalts dargelegt werden. In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit dem Rechner durchgeführt werden, sofern dies nicht durch einen Zusatz ausgeschlossen wird.	Für die Steigungswinkel α_1 und α_2 zweier Geraden gilt: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$. Leiten Sie daraus den folgenden Zusammenhang zwischen den Steigungen m_1 und m_2 der Geraden her: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede werden nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten ermittelt und dargestellt. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren).	Vergleichen Sie die den Verlauf der Graphen der Funktionen f_{-5} und f_5.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.	Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.	Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mithilfe der berechneten Punkte.

Anhang A.2

Liste mathematischer Schreibweisen

Liste mathematischer Schreibweisen

Logische Operatoren

$\neg$	logische Negation einer Aussage
$\wedge$	logische Und-Verknüpfung zweier Aussagen
$\vee$	logische Oder-Verknüpfung zweier Aussagen
$\Rightarrow$	logische Implikation $A \Rightarrow B$: Aus Aussage A folgt die Aussage B.
$\Leftrightarrow$	logische Äquivalenz zweier Aussagen $A \Leftrightarrow B$: Aus Aussage A folgt die Aussage B und umgekehrt.

Mengen und Mengenoperatoren

$\emptyset; \{\ \}$	leere Menge
$x \in A,\ x \notin B$	x ist ein Element der Menge A, x ist kein Element der Menge B.
$\{x \in \mathrm{IR} \mid x < 5\}$	Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als 5 sind.
$A \subset B$	Die Menge A ist eine echte Teilmenge der Menge B.
$A \subseteq B$	Die Menge A ist eine echte Teilmenge oder gleich der Menge B.
$A \setminus B$	Differenzmenge
$A \cup B$	Vereinigungsmenge
$A \cap B$	Schnittmenge
$\bar{A}$	Komplementmenge

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$; IN	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$, Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$; Z	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$; IR	Menge der reellen Zahlen
IR^+	$\mathrm{IR}^+ = \{x \in \mathrm{IR} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne 0
$]a;b[$	offenes Intervall: $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$]a;b]$	halboffenes Intervall: $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a;b[$	halboffenes Intervall: $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$[a;b]$	abgeschlossenes Intervall: $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Analysis

Funktionen und Funktionsscharen können auf viele verschiedene Weisen definiert werden. Es sind zum Beispiel folgende Schreibweisen gängig:

- f ist eine Funktion mit $f(x) = x^2$ und $x \in \mathbb{R}$.
- Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x^2$ mit dem Graphen G_f.
- Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ mit dem Graphen G_f.
- Für jedes $a \in \mathbb{R}$ wird die Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert.
- Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.
- $f(x)$ bezeichnet den Funktionsterm einer Funktion f.

$\infty\,;+\infty\,;-\infty\,;\pm\infty$	unendlich, minus unendlich, plus/minus unendlich
$\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$	Summe über alle a_k mit $k = n, \ldots, m$.
$\lvert a \rvert$	Betrag einer Zahl a
$f(x); f_a(x)$	Funktionsterm der Funktion f; einer Funktionsschar oder einer parametrisierten Funktion f_a
$f(x) = x^2$	Funktionsgleichung einer Funktion f
$x \mapsto x^2$	x wird abgebildet auf x^2
D_f	Definitionsmenge/Definitionsbereich einer Funktion f
W_f	Wertemenge/Wertebereich einer Funktion f

$x \to k$ $x \to \pm\infty$	x konvergiert gegen k x konvergiert gegen $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to k} a_x$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_x$	Grenzwert des Terms a_x Beispiele: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+5\right)=5$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
$f'; f''; f'''; f^{(4)}; f^{(n)}$	erste; zweite; dritte; vierte; n-te Ableitungsfunktion von f
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$	bestimmtes Integral
$F_a(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$	Integralfunktion
$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$	uneigentliche Integrale
$\left[F(x)\right]_a^b$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist

Stochastik

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
$P(A\cup B)$ $P(A\cap B)$	Wahrscheinlichkeit der Vereinigungs-menge Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge
$P_A(B); P(B\mid A)$	bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereig-nisse B unter Bedingung, dass A bereits eingetreten ist
$X; Y; Z; X_1; Y_2; \ldots$	Zufallsgröße
$E(X), \mu, \mu_x$	Erwartungswert einer Zufallsgröße X
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
$P_p^n(X=k); P(X=k)$	Wahrscheinlichkeit der binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n (An-zahl der Versuche) und p (Erfolgswahr-scheinlichkeit)

$P(X<k); P(X\le k); P(X>k); P(X\ge k);$ $P(r<X\le s)$ $\sum_{k=r}^{s} P(X=k)$	kumulierte Wahrscheinlichkeiten
$\sigma; \sigma_X; \sigma(X)$	Standardabweichung der Zufallsgröße X
$V(X); V_X; Var(X)$	Varianz einer Zufallsgröße X
$[\mu-1{,}96\sigma\,;\,\mu+1{,}96\sigma]$	Beispiel einer Sigma-Umgebung in Intervallschreibweise
Fehler 1. Art α-Fehler	wahre Hypothese wird aufgrund des Stichprobenergebnisses verworfen
Fehler 2. Art β-Fehler	falsche Hypothese wird aufgrund des Stichprobenergebnisses nicht verworfen
$\varphi_{\mu;\sigma}(x)$	Gaußsche Glockenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte einer normalverteilten Zufallsgröße mit Parametern μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung)
$\varphi(x)$ $\Phi(x)$	Standard-Glockenfunktion mit Stammfunktion $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(x)\,dx$

Geometrie

$\parallel$	parallel zu
$\perp$	orthogonal zu
AB	Gerade durch die Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke (Seite, Kante) mit den Endpunkten A und B
$\lvert\overline{AB}\rvert$	Länge der Strecke $\overline{AB}$
$\angle BAC$, $\sphericalangle BAC$	Winkel zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ im Gegenuhrzeigersinn
ABCD	Bezeichnungsweise von Vielecken und flächig beschränkten Körpern Beispiele: Dreieck ABC, Viereck ABCD, Pyramide ABCS

Vektoren und Matrizen

$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$	n-dimensionaler Vektor
$\vec{o}$	Nullvektor
$\vec{v}\cdot\vec{w}$; $\vec{v}\circ\vec{w}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$
$\vec{v}\times\vec{w}$	Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	Matrix A mit m Zeilen und n Spalten und den Koeffizienten a_{ij}
$\left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$	Erweiterte Koeffizientenmatrix
$A\cdot\vec{v}$	Matrix-Vektor-Produkt
$A\cdot B$	Matrizenprodukt
E	Einheitsmatrix
A^T	Transponierte der Matrix A
A^n	n-te Potenz der Matrix A
A^{-1}	Inverse der Matrix A

Analytische Geometrie

O	Ursprung des Koordinatensystems
x, y, z x_1, x_2, x_3	Achsenbezeichnungen
$P(p_x \| p_y)$ $B(p \| q)$ $A(a_1 \| a_2 \| a_3)$	Punkt im zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem mit Koordinaten

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$	Ortsvektor von P mit Komponenten p_1, p_2 und p_3
$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}, r \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}$	Parameterform einer Geraden g mit Stützvektor $\vec{p}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$
$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}, r, s \in \mathbb{R}$ $E: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	Parameterform einer Ebene E mit Stützvektor $\vec{p}$ und Spannvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$
$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$	Koordinatenform einer Ebene E
$E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ $E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$	Normalenform einer Ebene E mit Stützvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$

Griechisches Alphabet

In Formeln und Skizzen werden auch griechische Buchstaben verwendet.