Die Senatorin
für Kinder und Bildung

Freie Hansestadt Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2017

Leistungskurs Mathematik (TR)

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421 361 6209 oder 4812)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 225 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Im Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.
- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den fünf vorgelegten Aufgaben drei zur

Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Es dürfen nicht beide Aufgaben aus dem Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie gewählt werden. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).

- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 1				
a)	Es gilt: $\int_0^2 f(x)dx = \left[-\frac{1}{4}\cdot x^4 + 6\cdot x^2\right] = 20$.		2	
b)	Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ und der Graph von f schließen eine Fläche mit dem Inhalt 12 ein. Daraus folgt, dass die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ und die Gerade g eine Fläche mit dem Inhalt 8 einschließen. Also sind die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $(0\,\vert\,24)$.			3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**0**	**2**	**3**

Aufgabe 2				
a)	Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass der blaue Sektor bei sieben Drehungen kein einziges Mal getroffen wird.		2	
b)	$\binom{10}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^8$	1		
c)	Die Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit für „trifft den gelben Sektor“ bei jedem einzelnen Spiel gleich ist, unabhängig von den bisherigen Versuchsausgängen.		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**4**	**0**

Aufgabe 3				
a)	$\left(\frac{3}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$	2		
b)	Abbildung A zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Begründung: X ist binomialverteilt mit $n = 6$ und $p = \frac{1}{4}$. Daraus folgt, dass $E(X) = 1{,}5$ gilt. Abbildung B zeigt eine Gleichverteilung und kommt deshalb nicht in Frage. Abbildung C zeigt eine Verteilung mit einem Erwartungswert größer als 1,5 und kommt daher ebenfalls nicht in Frage.		3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

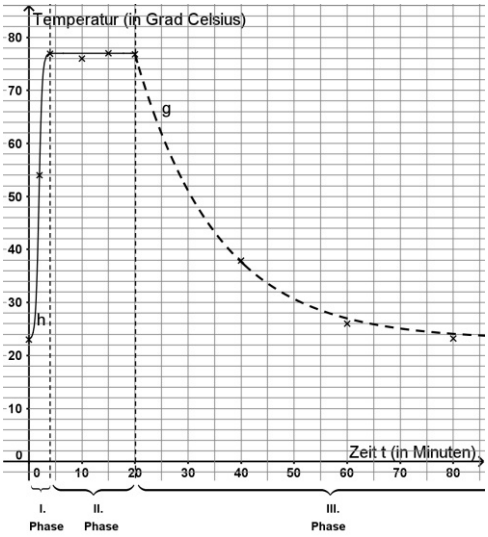
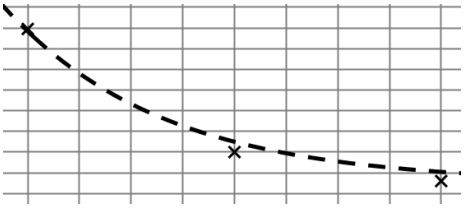
Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 4				
a)	Die Koordinaten des Schnittpunktes P der Geraden des Lichtstrahls von der Spitze $S(0\|0\|6)$ mit der x_1-x_2-Ebene ($x_3 = 0$) ergeben sich für $s = 3$: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$ $P(-9\|12\|0)$; $\left\|\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2 + 0^2} = 15$; die Schattenlänge beträgt 15 m.	1	2	
b)	Analog zu 1.1 wird die Schattenlänge zum Zeitpunkt t_1 berechnet. Ist der Schatten zum Zeitpunkt t_1 kürzer als zum Zeitpunkt t_0 , so steht die Sonne höher, sonst nicht.	1	1	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

Aufgabe 5				
a)	Eine mögliche Übergangsmatrix lautet: $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.	2		
b)	Die richtige Abbildung ist Abbildung B. Begründung: Aus dem Graphen ergibt sich: Nach der ersten Zeiteinheit sind alle Ratten in R2. Daher sind nach der zweiten Zeiteinheit keine Ratten in R2. Folglich sind nach der dritten Zeiteinheit keine Ratten in R1. Nur in Abbildung B ist R1 nach der dritten Zeiteinheit leer.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	**0**

Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

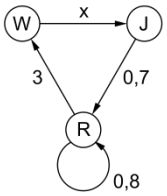
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Aus $f_k(4) = -\frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2}$ folgt beispielsweise $f_2(4) = 3$ sowie $f_3(4) = 9$. Darum gehört der Graph V zur Funktion f_2 und der Graph II zur Funktion f_3. Der Term von f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten, daher verläuft der Graph symmetrisch zur y-Achse. Mit $f_k'(x) = -\frac{3k}{128}x^3 + \frac{3k^2}{16}x$ ergibt sich : $-\frac{3k}{128}x^3 + \frac{3k^2}{16}x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee -\frac{3k}{128}x^2 + \frac{3k^2}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 8k \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{8k} \vee x = -\sqrt{8k}$ Wegen $x = \sqrt{8k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}x^2$ ergibt sich die Ortskurve $y = \frac{3}{8}k^3 = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}x^2\right)^3 = \frac{3}{4096}x^6$.	4	5	2
b)	Wegen $d\cdot\pi = 18{,}85 \Rightarrow d \approx 6$ befindet sich die Dekorlinie, dort, wo das Glas einen Durchmesser von 6 cm hat. Aus $f_3(3) \approx 6{,}17$ folgt dann, dass sich die Dekorlinie etwa in 6,17 cm Höhe befindet. Mit $f_3'(x) = -\frac{9}{128}x^3 + \frac{27}{16}x$ folgt: $f_3'(4) = 2{,}25$. Für die Tangente t gilt: $t(x) = f_3'(4)\cdot(x-4) + f_3(4) = 2{,}25\cdot x - 9 + 9 = 2{,}25\cdot x$. Die Tangente verläuft durch die Punkte $O(0\mid 0)$ und $P(4\mid 9)$. Die Länge L des fraglichen Strohhalmabschnitts beträgt etwa 9,8 cm, denn: $L = \sqrt{4^2 + 9^2} \approx 9{,}8$. Es gilt $f_3''(x) = -\frac{27}{128}x^2 + \frac{27}{16} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt{8} \vee x = \sqrt{8}$. Damit gilt $f_3''(x) > 0$ für $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$ und der Graph ist auf diesem Intervall linksgekrümmt.		6	5
c)	Der Graph I beschreibt den Längsschnitt des Sektglases. Da der Scheitelpunkt der Parabel p in $(0\mid 0)$ liegt, gilt: $p(x) = a\cdot x^2$. Aus den Abmessungen des Sektglases ergibt sich $p(3) = a\cdot 3^2 = 12 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$, also $p(x) = \frac{4}{3}\cdot x^2$. $\pi\cdot\int_0^6 (r(h))^2\,dh = \pi\cdot\int_0^6 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3h}\right)^2 dh = \pi\cdot\int_{00}^6 \left(\frac{3}{4}h\right)dh = \pi\cdot\left[\frac{3}{8}h^2\right]_0^6 = 13{,}5\cdot\pi \approx 42{,}4$ Das Volumen der Flüssigkeit beträgt etwa 42,4cm^3. Es muss gelten: $100 = \pi\cdot\int_0^x \left(\frac{1}{2}\sqrt{3h}\right)^2 dh \Leftrightarrow \pi\cdot\left[\frac{3}{8}h^2\right]_0^x = 100 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2\cdot\pi = 100 \Leftrightarrow x^2 = \frac{800}{3\pi}$ $\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{800}{3\pi}} \vee x = \sqrt{\frac{800}{3\pi}} \approx 9{,}2$. Der Markierungsstrich befindet sich damit etwa 12cm - 9,2cm = 2,8 cm unterhalb des oberen Glasrandes.	3	6	2
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**17**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Bedingungen: $f(0)=77$ und $f'(0)=-2{,}7$. Erste Ableitung: $f'(t)=-k\cdot a\cdot e^{-k\cdot t}$. Aus der ersten Bedingung wird gefolgert: $f(0)=77 \quad\Rightarrow\quad 23+a\cdot e^{-k\cdot t}=77 \quad\Rightarrow\quad a=54$. Dies in die zweite Bedingung eingesetzt liefert $-k\cdot 54\cdot e^{-k\cdot 0}=-2{,}7 \;\Rightarrow\; k=0{,}05$. Die Raumtemperatur beträgt 23° C.	3	3	
b)	<table><tr><td>Zeit in Minuten</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td></tr><tr><td>Funktionswerte der Funktion g</td><td>76,8</td><td>37,7</td><td>27,0</td><td>24,1</td></tr></table>  Bei der Bewertung der Zeichnung ist auf die Unterscheidung zwischen Mess- und Funktionswerte zu achten.  Zeichnung $g(t)=25 \;\Rightarrow\; 23+197{,}4\cdot e^{-0{,}065\cdot t}=25 \;\Rightarrow\; t\approx 70{,}6$. Die Temperatur der Modellierung g ist nach ungefähr 70,6 Minuten auf 25°C gesunken. Die Messwerte nach 60 und nach 80 Minuten sind niedriger als die entsprechenden Funktionswerte der Modellierung g. Die Temperatur der Flüssigkeit wird daher nach 70,6 Minuten ebenfalls niedriger sein. Die 25°C werden also vermutlich etwas früher erreicht. $-0{,}065\cdot(g(t)-23)=-0{,}065\cdot(23+197{,}4\cdot e^{-0{,}065\cdot t}-23)$ $=-0{,}065\cdot 197{,}4\cdot e^{-0{,}065\cdot t}=g'(t)$ Z.B.: Die Abnahmegeschwindigkeit der Temperatur ist proportional zur Differenz zwischen der Temperatur der Flüssigkeit und der Temperatur von 23°C.	3	5	3

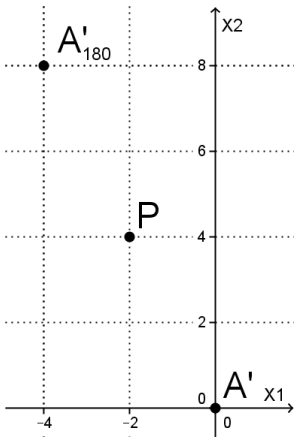
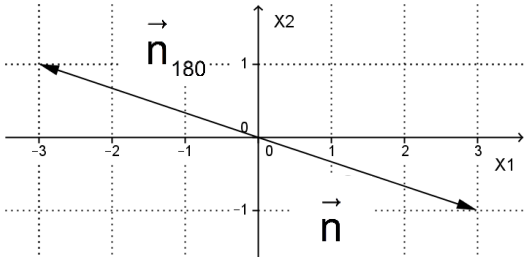
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
c)	Aus $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{1+540\cdot e^{-3{,}3\cdot t}}=0$ folgt $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{c}{1+540\cdot e^{-3{,}3\cdot t}}+d=d$ und damit $d=23$. Aus $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1+540\cdot e^{-3{,}3\cdot t}}=1$ folgt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{1+540\cdot e^{-3{,}3\cdot t}}+d=c+d$, also $d=77-23=54$.		2	3
d)	Der Graph A gehört zu $f_{0,7}$, der Graph B zu f_1 und der Graph C zu f_2. Die Funktion f_1 eignet sich für diese Modellierung. Wendepunkt: Zweite Ableitung: $f_k''(t)=\left(\frac{k^2t}{5}-4k\right)\cdot e^{-0{,}1\cdot k\cdot t}$ Notwendige Bedingung: $f_k''(t)=0\Rightarrow\left(\frac{k^2t}{5}-4k\right)\cdot e^{-0{,}1\cdot k\cdot t}=0\Rightarrow\frac{k^2t}{5}-4k=0\Rightarrow t=\frac{20}{k}$ y-Wert: $f_k\left(\frac{20}{k}\right)=23+\frac{400}{k}\cdot e^{-2}$. Der Wendepunkt von f_k ist bei $W_k\left(\frac{20}{k}\middle\vert 23+\frac{400}{k}\cdot e^{-2}\right)$. Am Wendepunkt ist die momentane Temperaturabnahme am größten. Mit $t=\frac{20}{k}$ folgt die Ortskurve der Wendepunkte: $w(t)=23+20\cdot t\cdot e^{-2}$.	1	7	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**17**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

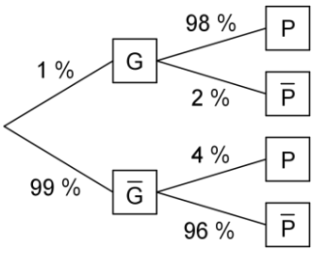
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	 x ist der Anteil der Welpen, die das erste Lebensjahr überleben. 28% der Tiere überleben die ersten beiden Lebensjahre und werden zu Rudelführerinnen. Damit gilt: $0,7 \cdot x = 0,28 \Leftrightarrow x = 0,4$ Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70% der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80% der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt: $0,7 \cdot J_0 + 0,8 \cdot 39 = 55 \Leftrightarrow J_0 = 34$.	5	4	
b)	Im Modell aus Aufgabe a) liegt die Sterblichkeit der Welpen in den ersten zwei Lebensjahren bei 72%. Im Modell aus Aufgabe b) ist diese mit 1-0,24=76% noch größer. Es gilt $\overrightarrow{v_8} = M * \overrightarrow{v_6} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$. Es gilt sowohl $\overrightarrow{v_{12}} = M * \overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}$ als auch $\overrightarrow{v_{12}} \approx 1,38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}$. $938 \cdot 1,38^{t-6} = 45000$ liefert: $t \approx 18$. Die Zahl 45000 gibt die Anzahl der Tiere an, aus denen die Population etwa 18 Jahre nach Beobachtungsbeginn besteht. Das Modell ist zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population nicht geeignet: Da die Wölfe in einem in einem großen, abgeschlossenen Gebiet leben, ist es nicht möglich, dass die Population langfristig exponentiell über alle Grenzen wächst. Zudem ist davon auszugehen, dass sich die Umweltbedingungen verändern und damit das Modell im Abstand weniger Jahre angepasst werden muss.	2	9	2
c)	$N * \vec{u} = \vec{u}$ liefert: $0,4u_2 + 0,6u_3 = u_3 \Leftrightarrow 0,4u_2 = 0,4u_3 \Leftrightarrow u_2 = u_3$. Sobald sich diese Wolfspopulation stationär entwickelt - das heißt sich stets gleichbleibend auf die drei Altersklassen verteilt - gibt es zudem stets genauso viele Jungtiere wie Rudelführerinnen.		4	2
d)	$\left(N * N^{-1}\right) * \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow a = 1$ Mit $\left(N + N^{-1}\right) \cdot \vec{u} = N * \vec{u} + N^{-1} * \vec{u} = \vec{u} + N^{-1} * N \cdot \vec{u} = 2\vec{u}$ ergibt sich: $\left(N + N^{-1}\right) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow a = 2$			5
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**17**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Die x_3-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein, deswegen verläuft die Gerade g durch die Punkte A und B parallel zur x_1x_2-Ebene. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}=0$. Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel und ein Winkel beträgt 90°, also handelt es sich um ein Rechteck. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$, also $M(-2\mid 4\mid 3)$ Eine mögliche Ebenengleichung: $E:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AC}$; $m,n\in\mathbb{R}$ $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\4\end{pmatrix}$	6	3	
b)	Mit $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi=\frac{\vec{v}*\vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi\approx 32{,}3°$ Die Bedingung ist also erfüllt. Aus $\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$ folgt $b=-0{,}2$ und $F(-0{,}6\mid 0{,}2\mid 0)$ Da die Gerade g durch A und B parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft und das Sonnenlicht als parallel einfallende Strahlen modelliert wird, ist $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ die Breite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt. Da $\cos\varphi=\frac{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{FG}\rvert}$ gilt, ist $\frac{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}{\cos\varphi}$ die Länge $\lvert\overrightarrow{FG}\rvert$ dieses Rechtecks, somit ist der Flächeninhalt das Produkt aus Länge und Breite.		7	5

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
c)	Der Fußpunkt L, der auf der Strecke $\overline{PM}$ liegt und die gleiche Höhe wie A und B hat, ist $L(-2\,\vert\,4\,\vert\,1)$. $\left\vert\overrightarrow{AL}\right\vert = \left\vert\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\right\vert = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ Der Radius beträgt 4,47m Alternative Rechnungen sind möglich.  Möglicher Lösungsansatz: Projektion des Punktes A in die x_1x_2-Ebene. Wegen $A'(0\,\vert\,0\,\vert\,0)$ und $P(-2\,\vert\,4\,\vert\,0)$ ist $A'_{180}(-4\,\vert\,8\,\vert\,0)$, da A_{180} auf der gleichen Höhe liegen muss wie A, ist $A_{180}(-4\,\vert\,8\,\vert\,1)$. (Andere Möglichkeit, wenn die Koordinaten von L bestimmt wurden: $\overrightarrow{OA'}_{180} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{AP}$) Möglicher Lösungsansatz: Die x_3 - Koordinate muss gleich bleiben, also müssen nur x_1 und x_2 betrachtet werden. Mit der rechten Skizze kommt man zum Ergebnis: $\vec{n}_{180} = \begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$.  		6	6
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**6**	**16**	**11**

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Baumdiagramm: G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor." P: „Das Testergebnis ist positiv." $P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}98\%$ $P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 95{,}06\%$ P (Testergebnis positiv | Glutenunverträglichkeit liegt vor) = $\frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{1-0{,}9506} \approx 19{,}84\%$  	6	3	
b)	Es gibt nur zwei Versuchsausgänge: Die Person hat eine Glutenunvertäglichkeit oder nicht. Dadurch, dass die Bevölkerung Deutschlands groß ist und die Stichprobe klein, kann man näherungsweise davon ausgehen, dass sich die Wahrscheinlichkeit p = 0,01 nicht ändert. $E(X) = 0{,}01 \cdot 400 = 4$ $P(C) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}99^{400} + 400 \cdot 0{,}99^{399} \cdot 0{,}01 \approx 9{,}05\%$ $P(D) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}99^{400} \approx 98{,}20\%$ $0{,}99^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}99)} \approx 458{,}2$ Man muss also mindestens 459 Personen auswählen. Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass man weniger als zwei Personen mit Glutenunverträglichkeit auswählt, kleiner als 5% sein soll, muss man mehr als 472 Personen befragen. (Ebenso richtig: Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens zwei Personen mit Glutenunverträglichkeit auswählt, mindestens 95% sein soll, muss man mehr als 472 (bzw. mindestens 473) Personen befragen.)	1	5	5
c)	H_0: „Höchstens 10% der Teststreifen sind unbrauchbar." Folgende Fehlentscheidungen können auftreten: Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. (Fehler erster Art) Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. (Fehler zweiter Art) Y: Anzahl unbrauchbarer Teststreifen B(100; 0,1; k) Ist k die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, so gilt: $P(Y \le 15) \approx 0{,}9601$ Die Größe des Fehlers erster Art beträgt ca. 4%. Für B(100; 0,15; k) gilt: $P(Y \le 15) \approx 0{,}5683$. Der Fehler zweiter Art beträgt also ca. 57% Für B(200; 0,1; k) gilt: $P(Y \le 27) \approx 0{,}9566$ sowie $P(Y \le 28) \approx 0{,}9729$ Der Fehler erster Art soll sich nicht erhöhen, also benötigt man ein Signifikanzniveau von mindestens 96%, dann muss $k \ge 29$ sein.		7	6
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**15**	**11**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik LK**
- Schule: _____ Schulnr.: _____
- Schulinterne Kursbezeichnung: _____
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  _____

  Für den „hilfsmittelfreien“ Teil wähle ich für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die 4 Aufgaben

  Nr. _____ , _____ , _____ und _____ aus.

  Für die Aufgaben mit Hilfsmitteln wähle ich für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die 3 Aufgaben

  Nr. _____ , _____ und _____ aus.

  Bremen / Bremerhaven, 3.5.2017

  _____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  _____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, 3.5.2017

  _____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle für den „hilfsmittelfreien Teil die vier Aufgaben Nr. _____ und für den Aufgabenteil mit Hilfsmitteln die drei Aufgaben Nr. _____ zur Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, 3.5.2017

  _____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben (gern auch mehrere Kurse auf einem Blatt – das spart Papier und Faxe)**:**

- Fach: **Mathematik LK** (TR)
- Schule: _____ Schulnr.: _____
- Schulinterne Kursbezeichnung(en): _____
- Anzahl(en) der geprüften Schülerinnen und Schüler: _____
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler für den „hilfsmittelfreien“ Teil die vier Aufgaben Nr. _____ , _____ , _____ und _____ sowie

  für den Aufgabenteil mit Hilfsmitteln die drei Aufgaben Nr. _____ , _____ und _____ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, 3.5.2017

_____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per Fax an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Nike Janke

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2017

Leistungskurs Mathematik

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

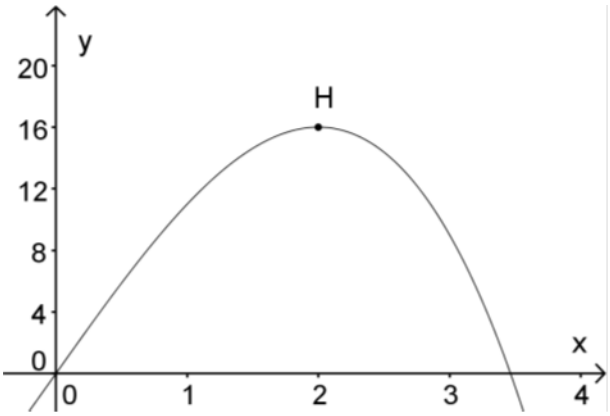
- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12 \cdot x$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2\,|\,16)$.



a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen im Bereich $0 \le x \le 2$ eine Fläche ein.

Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

(2 Punkte)

b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung.

Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen im Bereich $0 \le x \le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der y-Achse.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Stochastik

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a) Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

(2 Punkte)

b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht.

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

(1 Punkt)

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %.

Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war.

Er folgert: *„Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“*

Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

(2 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

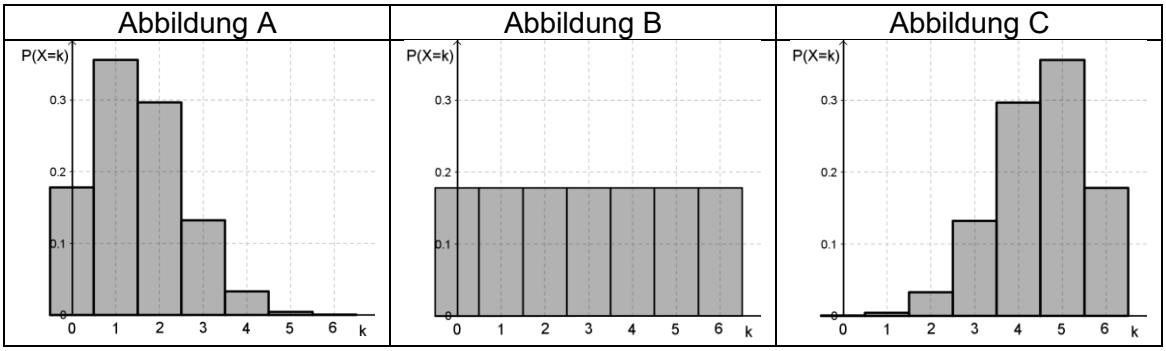
a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2 Punkte)

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten.

Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar.



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.

Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Ein Fahnenmast ragt auf einem ebenen, horizontalen Platz 6 m vertikal nach oben. In einem kartesischen Koordinatensystem wird dieser Platz durch die x_1-x_2-Ebene und die Spitze des Fahnenmasts durch den Punkt $S(0|0|6)$ modelliert. Der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung der Sonnenstrahlen zum Zeitpunkt t_0 an.

a) Bestimmen Sie die Länge des Schattens, den der Fahnenmast zum Zeitpunkt t_0 auf den Platz wirft.

(3 Punkte)

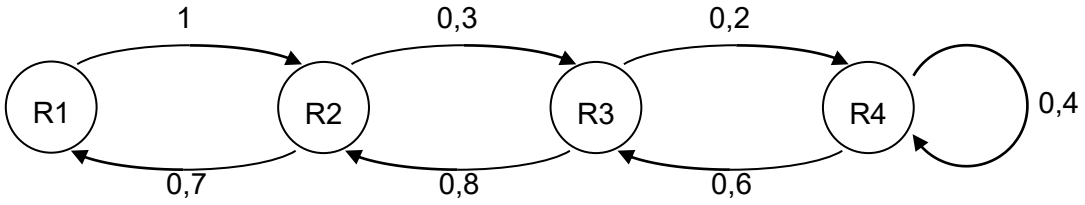
b) Zu einem anderen Zeitpunkt t_1 wird die Richtung der Sonnenstrahlen durch den Vektor $\overrightarrow{v_1}$ dargestellt.

Beschreiben Sie einen Weg, wie man rechnerisch ermitteln kann, ob die Sonne zum Zeitpunkt t_1 höher steht als zum Zeitpunkt t_0.

(2 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen (R1, R2, R3 und R4) beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.



a) Geben Sie eine zugehörige Übergangsmatrix an.

(2 Punkte)

b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R1.

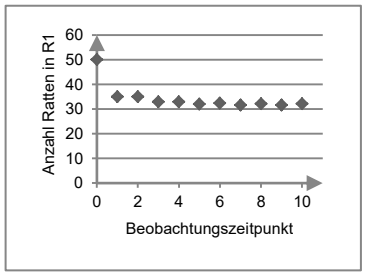


Abbildung A

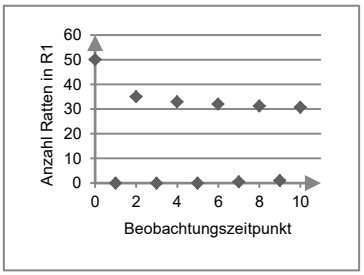


Abbildung B

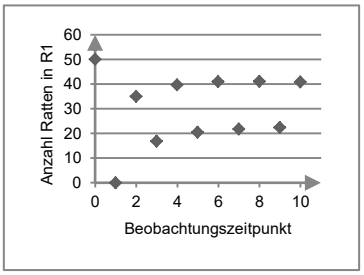


Abbildung C

Geben Sie an, um welche Abbildung es sich handelt.

Begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2017

Leistungskurs Mathematik (TR)

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 225 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

TR

Gläser

Es werden die mittigen Längsschnitte von Gläsern ohne die Füße und Stiele der Gläser[1] betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Materialstärke der Gläser wird im Folgenden vernachlässigt. Die Glasformen sind so gewählt, dass sich jeder Längsschnitt durch eine Funktion f_k beschreiben lässt mit $f_k(x) = -\frac{3 \cdot k}{512} \cdot x^4 + \frac{3 \cdot k^2}{32} \cdot x^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.

Die Abbildung 1 zeigt fünf zugehörige Graphen.

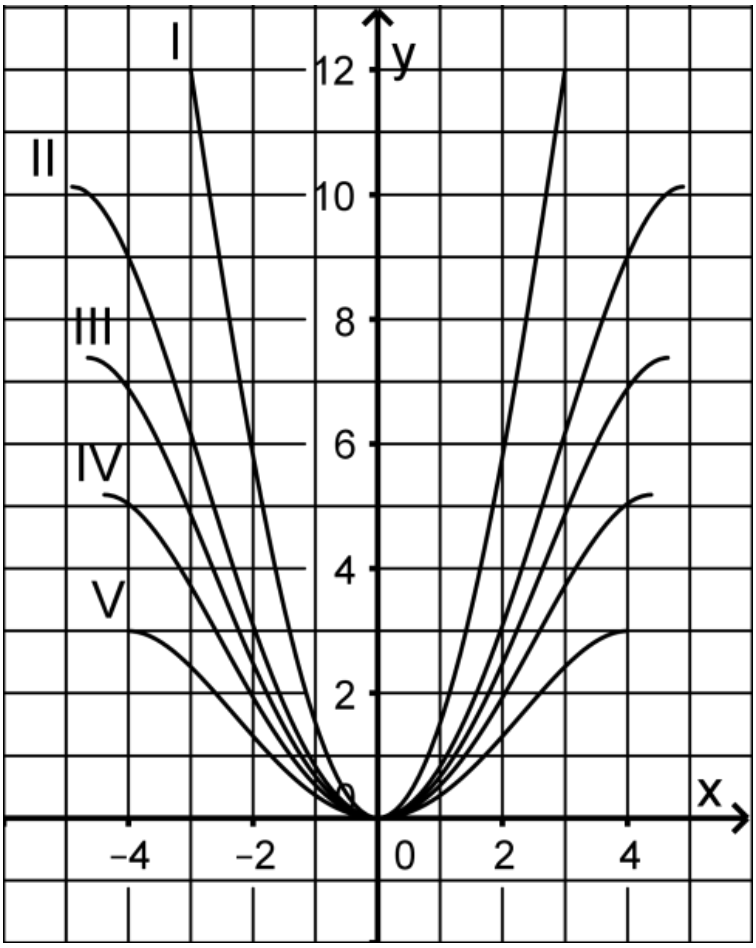


Abbildung 1

a) **Ordnen** Sie den Funktionen f_2 und f_3 jeweils mit Hilfe einer Rechnung den zugehörigen Graphen **zu**.

Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k > 0$ symmetrisch zur y-Achse ist.

Berechnen Sie die möglichen Extremstellen von f_k (eine Überprüfung mit f_k'' ist nicht nötig).

Alle Extrempunkte $H_k\left(\sqrt{8k} \mid \frac{3}{8} \cdot k^3\right)$ liegen auf einer Ortskurve. **Bestimmen** Sie deren Gleichung.

(11 Punkte)

[1] Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig. Im Koordinatensystem stellt die y-Achse die Rotationsachse für jedes Glas dar.

Im Folgenden werden ein Cocktailglas und ein Sektglas näher betrachtet.

Der Längsschnitt des Cocktailglases lässt sich mit der Funktion f_3 beschreiben mit

$$f_3(x) = -\frac{9}{512} \cdot x^4 + \frac{27}{32} \cdot x^2, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}.$$

b) Um das Glas herum ist eine kreisrunde 18,85 cm lange Dekorlinie eingeschliffen.

Berechnen Sie, in welcher Höhe diese verläuft.

Im Glas steht ein Strohhalm,[2] der es im oberen Bereich tangential berührt. Im Modell entspricht dieser Berührpunkt dem Punkt $P(4|9)$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t, welche die Lage des Strohhalms beschreibt.

Ermitteln Sie die Länge des Strohhalmabschnitts, der zwischen seinem unteren Punkt und dem Berührpunkt liegt.

Bestimmen Sie das Intervall für x, in dem der Längsschnitt des Cocktailglases linksgekrümmt ist.

(11 Punkte)

Das Sektglas ist 12 cm hoch und sein oberer Rand hat einen Durchmesser von 6 cm.

c) **Geben** Sie an, welcher Graph den Längsschnitt des Sektglases beschreibt.

Der Längsschnitt des Sektglases erinnert an eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0|0)$.

Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Angaben eine quadratische Funktion p, die den Längsschnitt näherungsweise beschreibt.

Wird das Sektglas mit Flüssigkeit gefüllt, gibt die Funktion r mit

$$r(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h}, \text{ wobei } h \in \mathbb{R}_0^+$$

zu jeder Füllhöhe h in cm näherungsweise den Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in cm an.

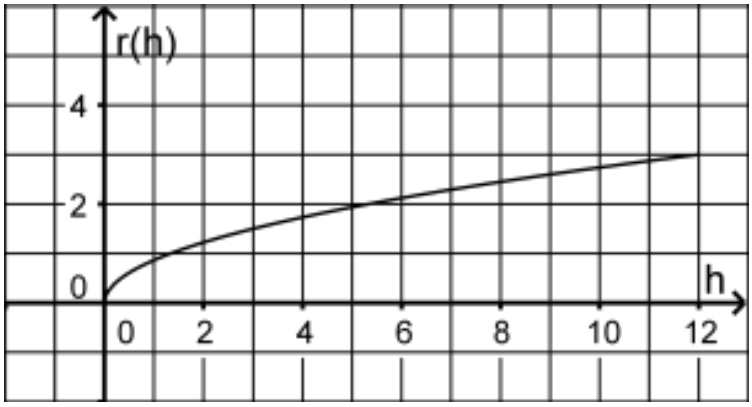


Abbildung 2

Ermitteln Sie unter Verwendung von r das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm.

In jedem Sektglas zeigt ein Markierungsstrich die Füllhöhe an, bei der das Glas genau 100 cm^3 Flüssigkeit enthält.

Untersuchen Sie, wie weit unterhalb des oberen Glasrandes sich diese Markierung befindet.

(11 Punkte)

[2] Der Durchmesser des Strohhalms wird im Folgenden vernachlässigt.

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

TR

Temperatur von Flüssigkeiten

In Produktionsprozessen sind die Temperaturen von Flüssigkeiten oft von großer Bedeutung. Mathematische Modellierungen der Temperaturen helfen die Prozesse zu optimieren. Bei allen Funktionen in dieser Aufgabe beschreibt der Funktionswert die Temperatur einer Flüssigkeit (in Grad Celsius) in Abhängigkeit von der Zeit (in Minuten). Runden Sie die berechneten Temperaturwerte auf eine Stelle hinter dem Komma.

a) **Modellierung eines Abkühlungsvorgangs**

Zu Beobachtungsbeginn beträgt die Temperatur einer kleineren Menge Flüssigkeit rund 77°C und die momentane Änderung der Temperatur ist -2,7°C pro Minute. Die Flüssigkeit kühlt dann auf Raumtemperatur ab.

Dieser Abkühlungsvorgang lässt sich für $t \geq 0$ durch Funktion f mit

$$f(t) = 23 + a \cdot e^{-k \cdot t} \text{ und } a, k \in \mathbb{R}$$

näherungsweise beschreiben.

Bestimmen Sie die passenden Werte von a und k.

Geben Sie die Raumtemperatur **an.**

(6 Punkte)

In einem Produktionsprozess wird nun eine Flüssigkeit erhitzt (Phase I), eine Zeit lang bei konstanter Temperatur gehalten (Phase II) und kühlt anschließend ab (Phase III). Dabei wurden Messungen durchgeführt. Die Messergebnisse (Kreuze) und die Phasen sind in Abbildung 1 im Material eingetragen.

Im Folgenden werden die Messungen abschnittsweise mit unterschiedlichen Funktionen modelliert.

b) **Abkühlung** (Phase III)

Der Abkühlungsvorgang ab der 20. Minute wird zunächst näherungsweise für $t \geq 20$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 23 + 197{,}4 \cdot e^{-0{,}065 \cdot t} \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

beschrieben. Die folgende Tabelle enthält die zugehörigen Messwerte:

Zeit in Minuten	20	40	60	80
Temperaturmessung in °C	76,8	37,9	26,0	23,2
Funktionswerte der Funktion g				

Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte und **zeichnen** Sie den Graphen von g mit Hilfe dieser Funktionswerte in das Koordinatensystem der Abbildung 1 im Material. Achten Sie dabei auf den Unterschied zwischen Mess- und Funktionswerten.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Rechnung nach welcher Zeit die Temperatur, die durch die Funktion g modelliert wird, 25°C beträgt.

Der tatsächliche Zeitpunkt, zu dem die Temperatur der Flüssigkeit 25°C beträgt, stimmt nicht mit dem berechneten Zeitpunkt überein. **Entscheiden** Sie begründet mit Hilfe der Mess- und Funktionswerte nach 60 und nach 80 Minuten, ob die Flüssigkeit vermutlich früher oder später als dies die Funktion g angibt, die Temperatur von 25°C hatte.

Zeigen Sie, dass die Funktion g die Gleichung $g'(t) = -0{,}065 \cdot (g(t) - 23)$ erfüllt und **interpretieren** Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

(11 Punkte)

c) **Erwärmung und Warmhalten** (Phasen I und II)

Zu Beginn steigt die gemessene Temperatur ungefähr von 23°C auf 77°C und wird dann bis zur 20. Minute konstant bei ca. 77°C gehalten. Die logistische Funktion h mit

$$h(t) = \frac{c}{1 + 540 \cdot e^{-3,3 \cdot t}} + d \ , \ t \in \mathbb{R} \text{ und Parametern } c, d \in \mathbb{R}$$

kann mit geeigneter Wahl der Parameter diesen Prozess für $0 \le t \le 20$ beschreiben. Ein entsprechender Graph von h ist in Abbildung 1 bereits eingezeichnet.

Bestimmen Sie die Parameter c und d, so dass gilt

$$\lim_{t \to -\infty} h(t) = 23 \text{ und } \lim_{t \to \infty} h(t) = 77 \ .$$

(5 Punkte)

d) **Modellierung verschiedener Temperaturverläufe durch Funktionen** f_k

Unterschiedliche Temperaturverläufe können durch Funktionen f_k mit

$$f_k(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot k \cdot t} \ , \ t, k \in \mathbb{R} \text{ und } t \ge 0 \ , \ k > 0$$

beschrieben werden.

In der Abbildung 2 im Material sind die Graphen der drei Funktionen $f_{0,7}$, f_1 und f_2 angegeben.

Entscheiden Sie welche Funktion zum Graph A, B bzw. C gehört (ohne Begründung).

Eine dieser drei Funktionen eignet sich, gleichzeitig die Phasen I und III der Messung mit den Messwerten aus Abbildung 1 zu modellieren. **Geben** Sie diese Funktion **an.**

Gegeben ist

$$f_k'(t) = (-2 \cdot k \cdot t + 20) \cdot e^{-0,1 \cdot k \cdot t} \ .$$

Jeder Graph f_k besitzt genau einen Wendepunkt. **Berechnen** Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von k. Eine Überprüfung der hinreichenden Bedingung ist nicht notwendig.

[Kontrollergebnis: $W_k\left(\frac{20}{k} \middle| 23 + \frac{400}{k \cdot e^2}\right)$]

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wendepunkts im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte der Funktionen f_k.

(11 Punkte)

Material

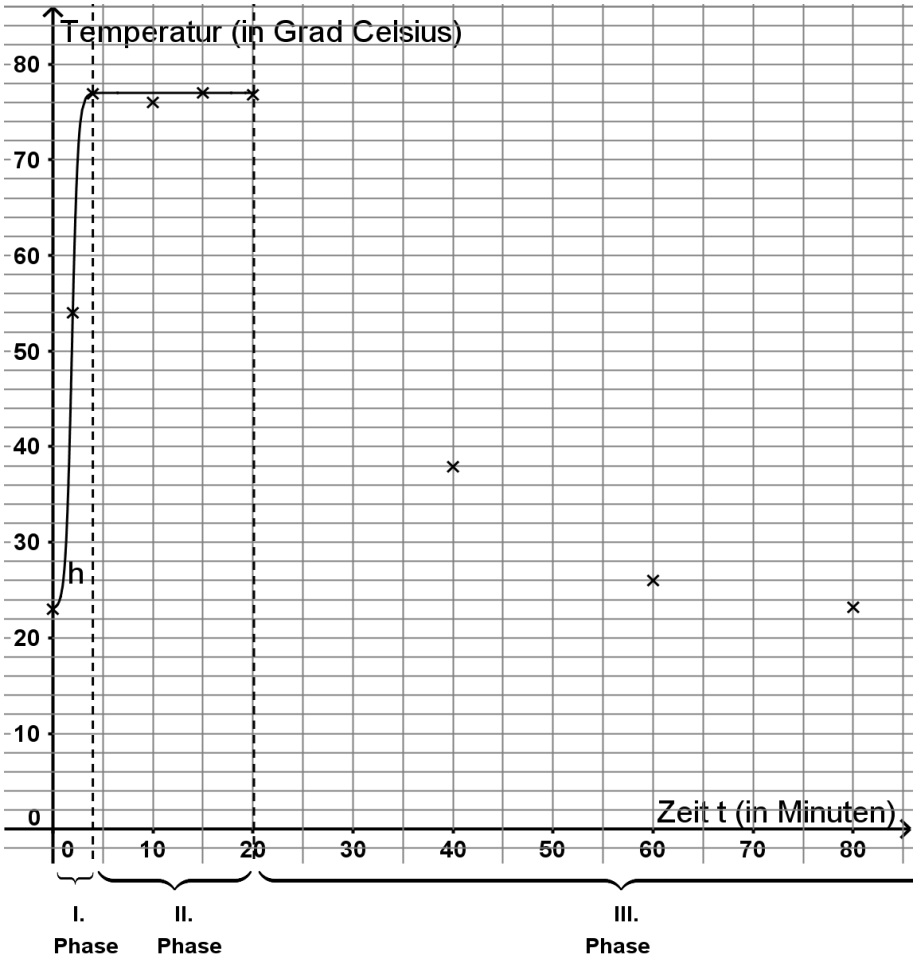


Abbildung 1

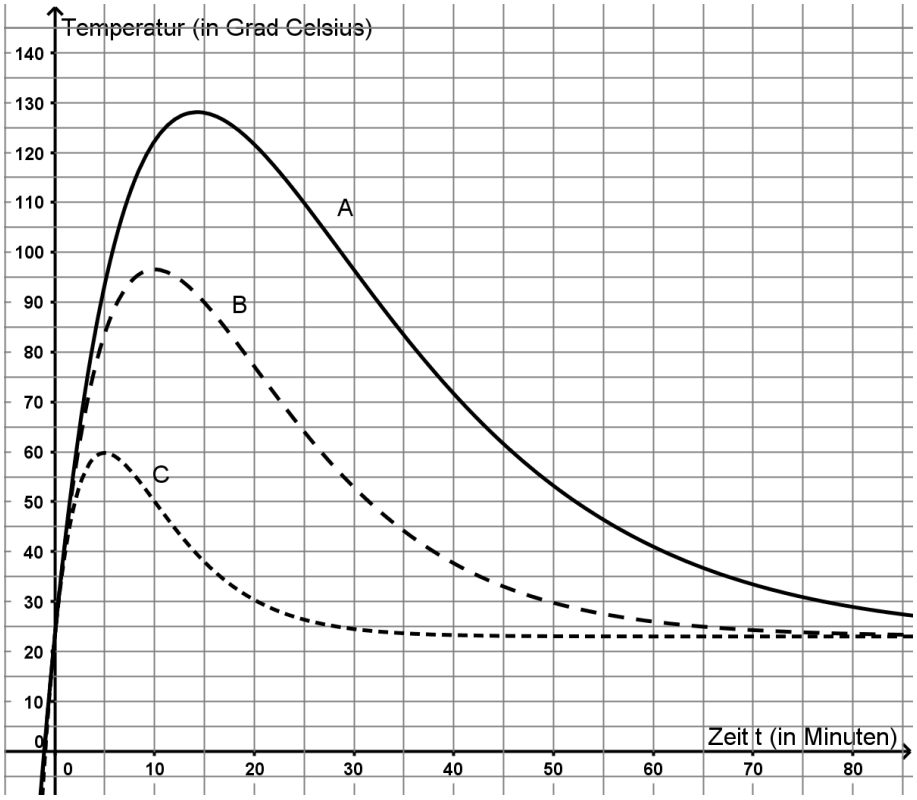


Abbildung 2

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Lineare Algebra

TR

Wölfe

Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, welches das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Danach sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen.

Im Folgenden werden stets nur weibliche Wolfspopulationen betrachtet.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet.

Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\overrightarrow{v_0}$ dargestellt.

Bitte rechnen Sie im Folgenden mit zwei Nachkommastellen und geben Sie stets ganze Tieranzahlen an.

a) Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = L * \overrightarrow{v_n}$ beschreiben.

Stellen Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes x im Sachzusammenhang.

Innerhalb der ersten zwei Lebensjahre sterben 72% der Wölfe als Welpen oder Jungtiere. **Ermitteln** Sie den Wert von x.

Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55. **Bestimmen** Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn.

(9 Punkte)

b) Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population. Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+2}} = M * \overrightarrow{v_n}$ beschrieben werden.

Vergleichen Sie den Anteil der Wölfe, die in den ersten beiden Lebensjahren als Welpen oder Jungtiere sterben mit der entsprechenden Sterblichkeit von 72% im Modell aus Aufgabenteil a).

Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\overrightarrow{v_6} = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt, d. h. die Population besteht zu diesem Zeitpunkt aus insgesamt 938 Tieren.

Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn.

Der Vektor $\overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ stellt die Zusammensetzungen der Population zehn Jahre nach Beobachtungsbeginn dar. Die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen nimmt in diesem Modell von nun an von einem Jahr zum <u>nächsten</u> Jahr um einen festen Faktor zu.

Zeigen Sie rechnerisch mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{v_{10}}$ und $\overrightarrow{v_{12}}$, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen von einem Jahr zum nächsten Jahr etwa 1,38 beträgt.

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $938 \cdot 1{,}38^{t-6} = 45000$ für $t \geq 6$. **Interpretieren** Sie die Lösung dieser Gleichung sowie die Zahl 45000 im Sachzusammenhang.

Beurteilen Sie das verwendete Modell hinsichtlich seiner Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population.

(13 Punkte)

Betrachtet werden nun 3x3-Matrizen N sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für die jeweils gilt:

$$N \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

c) **Zeigen** sie für die spezielle Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, dass $u_2 = u_3$ gilt.

Eine weitere Wolfspopulation lebt in einem anderen großen und abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung der weiblichen Tiere von einem Jahr zum nächsten wird durch die Matrix N und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = N * \overrightarrow{v_n}$ modelliert.

Interpretieren Sie die Gleichung $N * \vec{u} = \vec{u}$ mit $u_2 = u_3$ im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

d) Die Matrix N^{-1} ist die jeweilig inverse Matrix zur Matrix N. **Prüfen** Sie allgemein für die folgenden Gleichungen, ob es einen Wert von $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die jeweilige Gleichung erfüllt ist:

- $\left(N * N^{-1}\right) * \vec{u} = a \cdot \vec{u}$
- $\left(N + N^{-1}\right) * \vec{u} = a \cdot \vec{u}$

(5 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie **TR**

Solarmodul

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD mit $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben.

a) **Begründen** Sie, dass die Gerade g durch die Punkte A und B parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit M bezeichnet. **Berechnen** Sie die Koordinaten von M.

Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. **Ermitteln** Sie eine Gleichung von E in Parameterform.

(9 Punkte)

Das Rechteck ABCD soll die Fläche eines Solarmoduls darstellen. Diese wird im Folgenden kurz „Modulfläche“ genannt. Die Modulfläche liegt in der Ebene $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$. Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

b) Für einen möglichst großen Energieertrag sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. **Prüfen** Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das in Abb. 1 durch parallele Pfeile dargestellt wird, senkrecht auf die Modulfläche. Diese erzeugt auf dem horizontalen Boden einen rechteckigen Schatten.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes F von A.

Begründen Sie unter Verwendung von Abb. 2, dass der Flächeninhalt des rechteckigen Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}$ berechnet werden kann.

(12 Punkte)

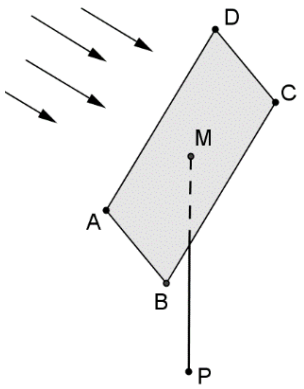


Abb.1

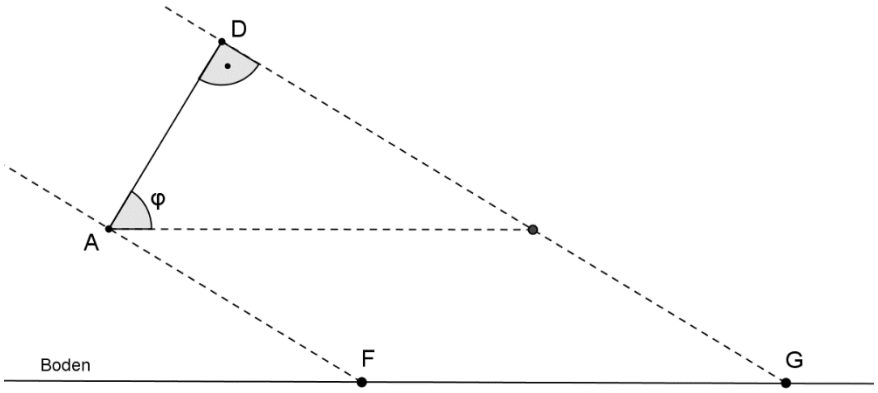


Abb.2

Die Modulfläche ist an einem Metallrohr befestigt, das senkrecht auf dem Boden steht. Dieses wird mit der Strecke $\overline{PM}$ modelliert, wobei der Punkt $P(-2|4|0)$ die Befestigung am Boden darstellt und der Punkt M die Befestigung an der Modulfläche (s. Abb.1).

Um die Modulfläche während eines Tages nach der Sonneneinstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr drehen. Die Neigung der Modulfläche bleibt dabei unverändert.

c) Betrachtet wird der Eckpunkt A:

Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt bei der Drehung des Metallrohrs bewegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes A, nachdem das Metallrohr um 180° gedreht wurde.

Ein möglicher Normalenvektor der Ebene, in der sich die Modulfläche in der Ausgangsposition befindet ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. **Ermitteln** Sie einen Normalenvektor für die Modulfläche nach einer Drehung von 180°.

(12 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Stochastik

TR

Glutenunverträglichkeit

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man das Testergebnis als positiv.

Runden Sie im Folgenden alle Prozentwerte auf zwei Nachkommastellen!

a) Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.

Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv."
B: „Das Testergebnis einer Person ist negativ."

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.

(9 Punkte)

b) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 400 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

Erläutern Sie, warum man die Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten von X als mehrstufigen Bernoulli-Versuch auffassen kann.

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
C: weniger als zwei der ausgewählten Personen eine Glutenunverträglichkeit haben.
D: mindestens eine Person eine Glutenunverträglichkeit hat.

Bestimmen Sie, wie viele Personen ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person eine Glutenunvertäglichkeit hat, größer als 99% ist.

Interpretieren Sie die Gleichung $0{,}99^n + n \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{(n-1)} < 0{,}05$ sowie die Lösung $n > 472$ mit $n \in \mathbb{N}$ im Sachzusammenhang.

(11 Punkte)

Der Test auf Glutenunverträglichkeit wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt. Einige von diesen Teststreifen sind unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind. In einer regelmäßigen Qualitätskontrolle wird getestet, ob der Wert von 10% unbrauchbaren Teststreifen überschritten wird. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

(Hinweis: Im Anhang finden Sie einige kumulierte Binomialverteilungen zu dieser Aufgabe.)

c) **Geben** Sie die zugehörige Nullhypothese H_0 des Tests **an,** die der Qualitätskontrolle zugrunde liegt.

Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art (α-Fehler), der der Entscheidungsregel, die bei dieser Qualitätskontrolle verwendet wird, zugrunde liegt.

Ein Kunde beschwert sich, dass die Qualität nachgelassen habe. Er behauptet, dass inzwischen 15% der Teststreifen unbrauchbar seien. **Ermitteln** Sie wie groß der Fehler zweiter Art (β-Fehler) wäre, wenn diese Angabe den Tatsachen entspräche.

Der Hersteller entschließt sich wegen der Beschwerde, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen. **Ermitteln** Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss.

(13 Punkte)

Anhang kumulierte Binomialverteilungen

n = 100 p = 0,1

k	$P(X \leq k)$
0	0,000026
1	0,000322
2	0,001945
3	0,007836
4	0,023711
5	0,057577
6	0,117156
7	0,206051
8	0,320874
9	0,451290
10	0,583156
11	0,703033
12	0,801821
13	0,876123
14	0,927427
15	0,960109
16	0,979401
17	0,989993
18	0,995419
19	0,998021
20	0,999192
21	0,999688
22	0,999886
23	0,999960
24	0,999987
25	0,999996
26	0,999999
27	1,000000

n = 100 p = 0,15

k	$P(X \leq k)$
0	0,000000
1	0,000002
2	0,000015
3	0,000093
4	0,000426
5	0,001553
6	0,004702
7	0,012165
8	0,027476
9	0,055095
10	0,099447
11	0,163486
12	0,247302
13	0,347425
14	0,457224
15	0,568315
16	0,672463
17	0,763277
18	0,837175
19	0,893456
20	0,933680
21	0,960722
22	0,977858
23	0,988113
24	0,993920
25	0,997035
26	0,998620
27	0,999387
28	0,999740
29	0,999895
30	0,999959
31	0,999985
32	0,999995
33	0,999998
34	0,999999
35	1,000000

n = 200 p = 0,1

k	$P(X \leq k)$
0	0,000000
1	0,000000
2	0,000000
3	0,000001
4	0,000008
5	0,000039
6	0,000148
7	0,000485
8	0,001388
9	0,003529
10	0,008071
11	0,016790
12	0,032047
13	0,056562
14	0,092946
15	0,143075
16	0,207478
17	0,284929
18	0,372419
19	0,465538
20	0,559175
21	0,648352
22	0,728972
23	0,798298
24	0,855106
25	0,899543
26	0,932775
27	0,956572
28	0,972908
29	0,983673
30	0,990492
31	0,994646
32	0,997084
33	0,998463
34	0,999216
35	0,999612
36	0,999814
37	0,999914
38	0,999961
39	0,999983
40	0,999993
41	0,999997
42	0,999999
43	1,000000