Schriftliche Abiturprüfung 2016 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (CAS)

Freitag, 29. April 2016, - 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421 …)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 165 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Im Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.
- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur

Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).

- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

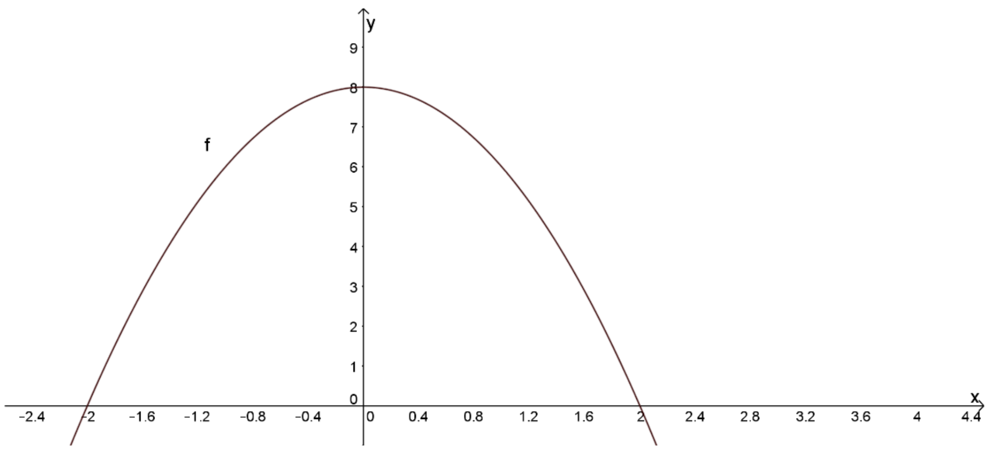
Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

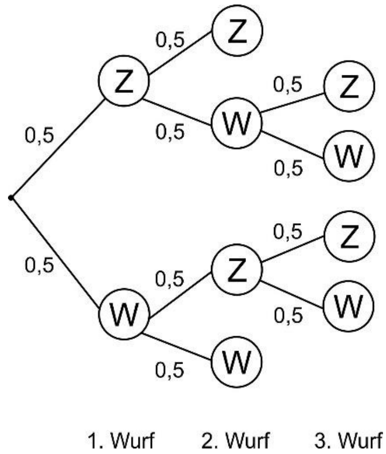
Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	**Bewertung I**	**Bewertung II**	**Bewertung III**
Aufgabe 1				
a)	Grafische Ermittlung der Fläche ergibt $\int_1^{2,5} f(x)dx \approx 2{,}5$.	1	1	
b)	Wegen $F'(x) = f(x)$ erhält man durch Ablesen des Funktionswerts $F'(2) \approx 2$.		1	
c)	Mit $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$ und $f''(x) = -3x + 3$ erhält man aus der notwendigen Bedingung $f''(x) = 0$ für einen Wendepunkt die mögliche Wendestelle $x = 1$. Da die Existenz einer Wendestelle vorgegeben ist, ist die Prüfung einer hinreichenden Bedingung nicht erforderlich.	1	1	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

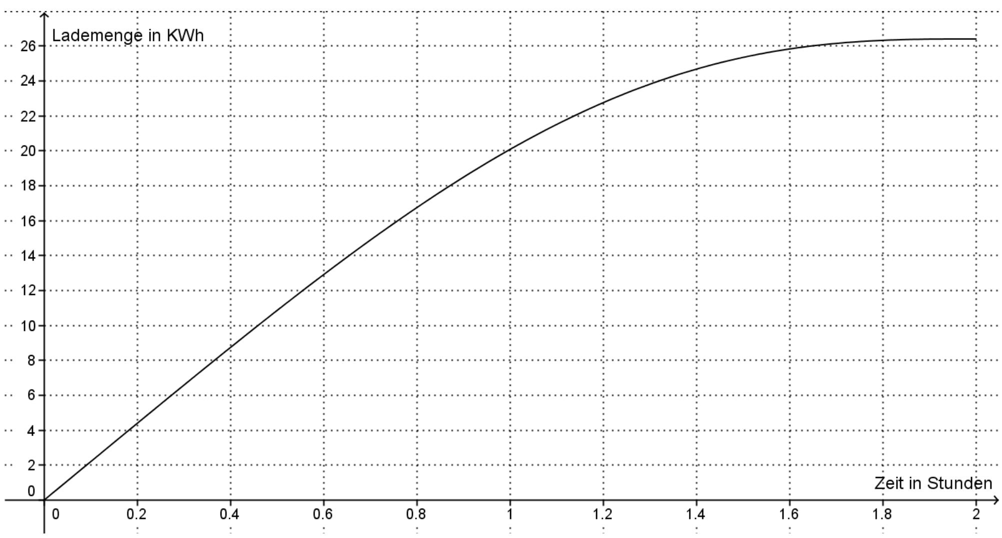
<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aufgabe 2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mit der y-Achse und der Beschriftung der Achsen sieht der Graph zum Beispiel folgendermaßen aus:

</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Stammfunktionen F_c von f sind gegeben durch $F_c(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + 8 \cdot x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Einsetzen von $F_c(3) = 5$ ergibt $-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 8 \cdot 3 + c = 5 \Leftrightarrow c = -1$. Die gesuchte Stammfunktion lautet also $F(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + 8 \cdot x - 1$.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

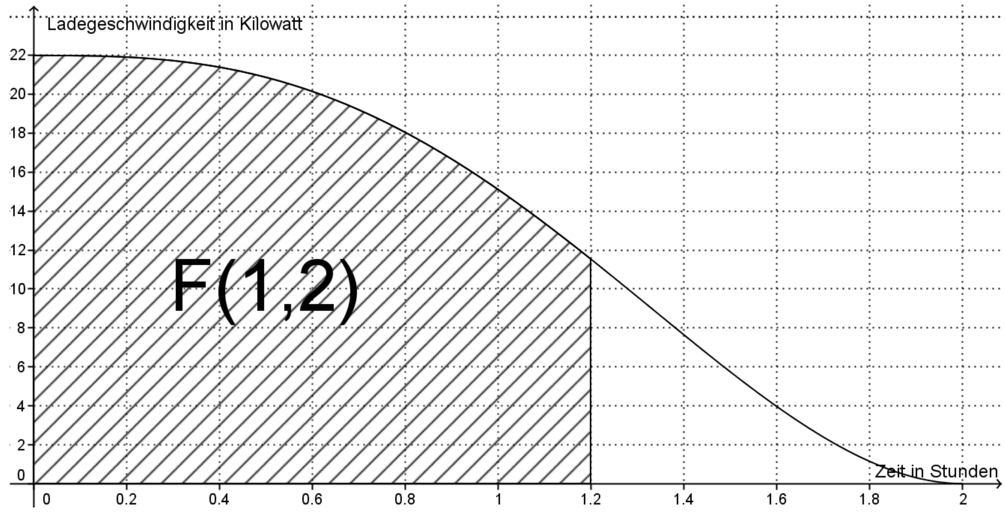
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 3				
a)	Baumdiagramm: 	3		
b)	Nicht alle Ergebnisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.		1	
c)	Es gilt: $P(X=3)=P(ZWZ)+P(ZWW)+P(WZZ)+P(WZW)=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$. (Lösung auch mit Hilfe des Baumdiagramms möglich.)		1	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	

		I	II	III
Aufgabe 4				
a)	Einsetzen der Koordinaten von $S_1(5\mid 0\mid 0)$ in die linke Seite der Ebenengleichung ergibt 30 und stimmt somit mit der rechten Seite überein, daher liegt S_1 auf der Ebene E. Wegen $x_2=x_3=0$ liegt der Punkt S_1 auch auf der x_1-Achse.	1		
b)	Da der Punkt S_3 auf der x_3-Achse liegt, hat er die Form $S_3(0\mid 0\mid x_3)$ für ein geeignetes x_3. Diese Koordinaten in die Ebenengleichung von E eingesetzt, liefert $x_3=2$, also $S_3(0\mid 0\mid 2)$.	1		
c)	Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{S_1S_2}=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$ stehen, dies ist beispielsweise für $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$ der Fall, weil $\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}=0$ ist. Mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich die Parametergleichung $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	

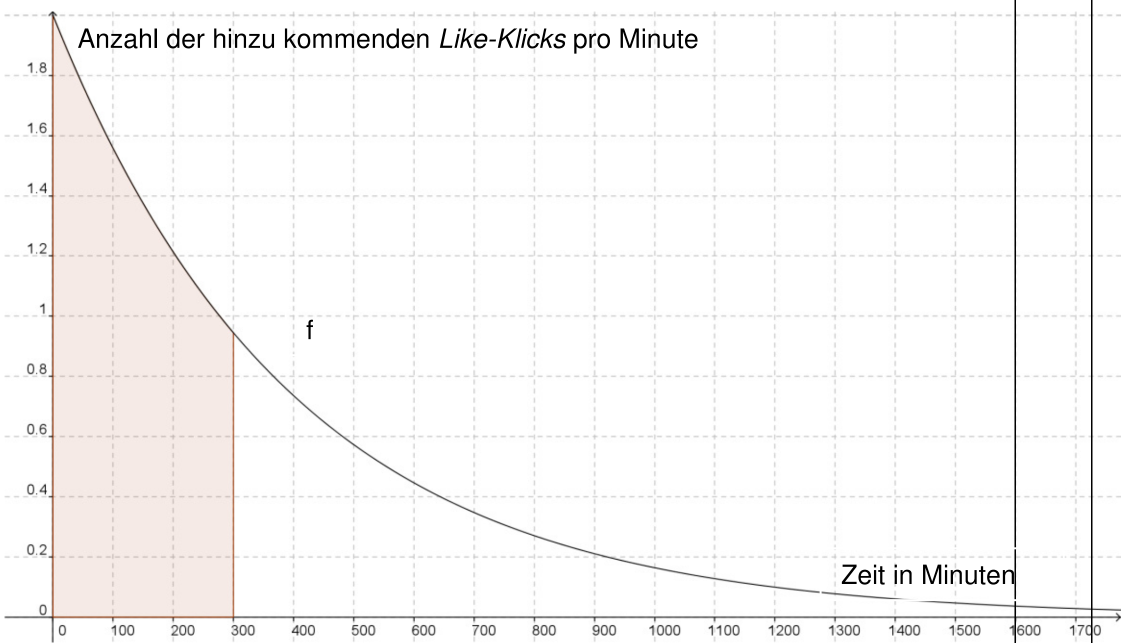
Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 5				
a)	Es gilt: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10$ und $1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 9$. Die Produktion einer Mengeneinheit von Zwischenprodukt Z_1 kostet 10 €, die Produktion einer Mengeneinheit von Zwischenprodukt Z_2 kostet 9 €.	2		
b)	Aus dem Gleichungssystem $4 \cdot a + 5 \cdot b = 13$ und $3 \cdot a + 2 \cdot b = 8$ erhält man die eindeutige Lösung $a = 2$ und $b = 1$.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	

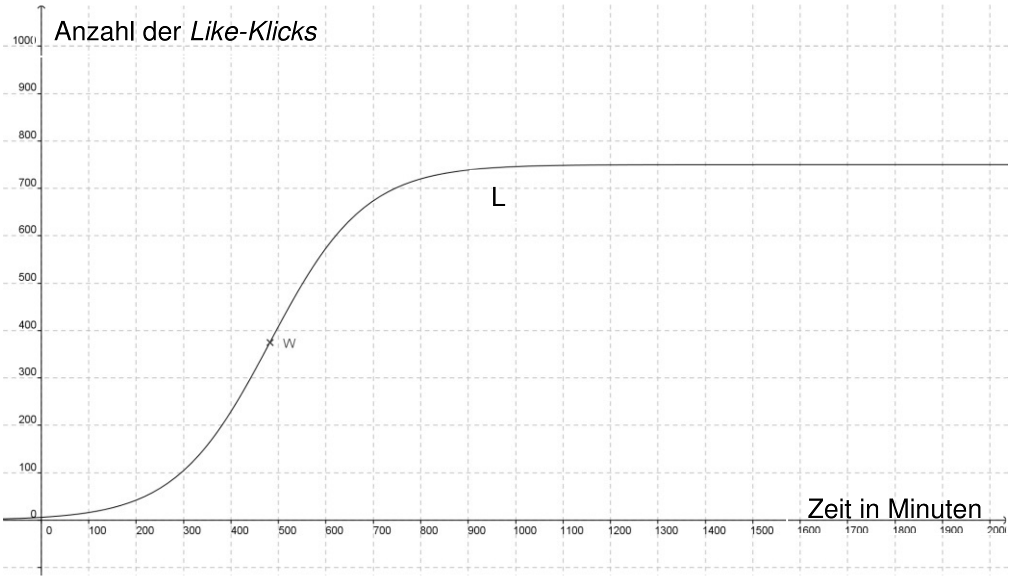
Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$g(t) = a \cdot t^4 + b \cdot t^3 + c$, $g'(t) = 4 \cdot a \cdot t^3 + 3 \cdot b \cdot t^2$
Den Angaben im Text entnimmt man $g(0) = 3{,}7$, $g(10) = 0$ und $g'(10) = 0$
Zu lösen ist das LGS:
$\begin{bmatrix} & & c & = 3{,}7 \\ 10000a & +1000b & +c & = 0 \\ 4000a & +300b & & = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = 0{,}0011 \\ b & = -0{,}0148 \\ c & = 3{,}7 \end{bmatrix}$
Funktionsgleichung: $g(t) = 0{,}0011 \cdot t^4 - 0{,}0148 \cdot t^3 + 3{,}7$</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f(0) = 22$ und $f(1) = 15{,}125$. Die Ergebnisse sind jeweils die Ladegeschwindigkeiten in kW.
Skalierung: x-Achse 0,2er-Schritte, y-Achse 2er-Schritte.
Mit $f'(t) = 16{,}5 \cdot t^3 - 33 \cdot t^2$ folgt $f'(0) = 0$ und $f'(2) = 0$.
$f''(t) = 49{,}5 \cdot t^2 - 66 \cdot t$. Aus $f''(t) = 0$ folgt $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{4}{3}$.
Da die Änderungsrate bei t_1 Null ist und der Graph im Bereich $0 \le t \le 2$ fällt, ist $t_2 = \frac{4}{3}$ der Zeitpunkt, zu dem die Ladegeschwindigkeit am stärksten abnimmt, also nach $\frac{4}{3}$ Stunden (bzw. einer Stunde und 20 Minuten).</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$F'(t) = 0{,}825 \cdot 5 \cdot t^4 - 2{,}75 \cdot 4 \cdot t^3 + 22 = 4{,}125 \cdot t^4 - 11 \cdot t^3 + 22 = f(t)$
Zeichnung:
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

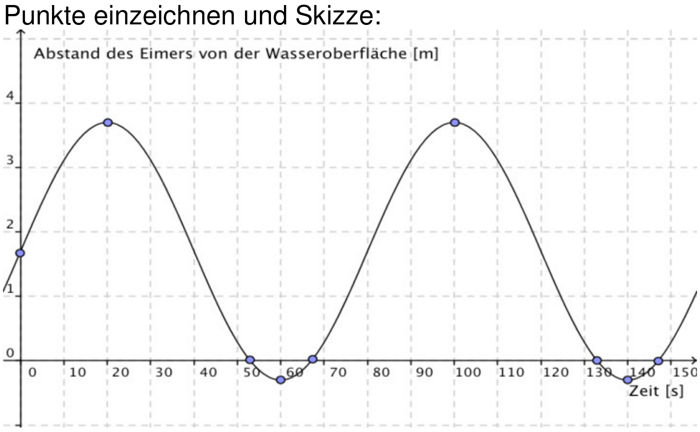
	 Der Wert von $F(2)=26,4$ bedeutet, dass insgesamt während des Ladevorgangs $26,4$ kWh geladen wurden. Das bedeutet, dass eine Restmenge von $L=28-26,4=1,6$ Kilowattstunden noch gespeichert war. Ein möglicher Ansatz: $F(t)=0,9\cdot 28-1,6$	2	3	3
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**12**	**6**

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute sinkt im Laufe der Zeit: f(0)=2>1,8=f(42). Zur Modellierung dient daher exponentielle Abnahme, d.h. für a gilt a<1. Mit $f(0)=2$ und $f(42)=1{,}8$ ergibt sich $c=2$ und $c\cdot a^{42}=1{,}8$, also $2\cdot a^{42}=1{,}8 \Leftrightarrow a^{42}=0{,}9 \Rightarrow a\approx 0{,}9975$ und es gilt: $f(t)=2\cdot 0{,}9975^{t}$.	2	3	
b)	Es gilt $f(300)=2\cdot e^{-0{,}0025\cdot 300}\approx 0{,}94$ $f(600)\approx 0{,}45$ und $f(900)\approx 0{,}21$. Das Bild erhält nach 5 Stunden 0,94 hinzu kommende *Like-Klicks* pro Minute, nach 10 Stunden 0,45 hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute und nach 15 Stunden 0,21 hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute. Zeichnung des Graphen von f in Abbildung 1.  F mit $F(t)=\frac{2}{-0{,}0025}\cdot e^{-0{,}0025\cdot t}=-800\cdot e^{-0{,}0025\cdot t}$ ist eine Stammfunktion zu f. $\int_0^{300} f(t)dt \approx 422$. In den ersten fünf Stunden kommen insgesamt etwa 422 *Like-Klicks* hinzu. Veranschaulichung des Integralwerts in Abbildung 1.	5	3	
c)	G ist ebenfalls eine Stammfunktion zu f, da G(t)=801+F(t) gilt und der konstante Wert 801 beim Ableiten wegfällt: $G'(t)=0+F'(t)=f(t)$. Es gilt: $801-800\cdot e^{-0{,}0025\cdot t}=672 \Leftrightarrow e^{-0{,}0025\cdot t}\approx 0{,}1613 \Leftrightarrow t\approx \frac{\ln(0{,}1613)}{-0{,}0025}\approx 730$. Nach etwa 12 Stunden und 10 Minuten haben 70% aller Sportler den *Like-Button* angeklickt. G(0)=1 und $\lim\limits_{t\to\infty} G(t)=801-800\cdot 0=801$. Zu Beginn klickt ein Sportler den *Like-Button* an und langfristig klicken nicht mehr als 801 Sportler den *Like-Button* an.		6	

d)	$L(0)=\frac{750}{1+124}=6$; zu Beginn klicken sechs Sportler den *Like-Button* an. Zeichnung des Punktes in W in Abbildung 2  Die Anzahl der *Like-Klicks* steigt im Laufe der Zeit von anfänglichen 6 auf (fast) 750 nach etwa 15 Stunden an. Der Punkt W markiert eine „Trendwende“, da die Geschwindigkeit, mit der das Bild *Like-Klicks* erhält, hier am größten ist; in den ersten 8 Stunden nimmt die Geschwindigkeit, mit der das Bild *Like-Klicks* erhält immer zu, doch nach etwa 8 Stunden nimmt diese Geschwindigkeit wieder ab.			6
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**12**	**6**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
a)	Es gilt $f(0)=1{,}7$, d. h. der Eimer ist zum Zeitpunkt $t=0$ Sekunden 1,7 Meter über der Wasseroberfläche. Die Amplitude beträgt $a=2$. Das entspricht dem Radius des Schöpfrads mit den Eimern. Mit dem Parameter $b=\frac{\pi}{40}=\frac{2\pi}{P}$ erhält man $P=80$, also eine Periodendauer von 80 Sekunden. Das bedeutet, dass es 80 Sekunden dauert, bis ein Eimer sich wieder an derselben Position befindet. Hoch- und Tiefpunkte: $H_0(20\,\vert\,3{,}7)$; $H_1(100\,\vert\,3{,}7)$; $T_1(60\,\vert\,-0{,}3)$; $T_2(140\,\vert\,-0{,}3)$ Für Hoch – und Tiefpunkte der allgemeinen Sinusfunktion $f(t)=a\cdot\sin(b\cdot(t-c))+d$ gilt: $H\left(\frac{P}{4}+c+kP\,\vert\,d+a\right)$; $k\in\mathbb{Z}$ und $T\left(-\frac{P}{4}+c+kP\,\vert\,d-a\right)$; $k\in\mathbb{Z}$. Da der Graph der Funktion gegenüber dem der Funktion $\sin(t)$ nicht nach rechts oder links verschoben ist und die Periodenlänge 80 Sekunden beträgt, ergeben sich die Koordinaten des ersten Hochpunkts $H_0(20\,\vert\,3{,}7)$. Nullstellenbestimmung: $0=2\sin\left(\frac{\pi}{40}t\right)+1{,}7$ liefert zum Beispiel $t\approx-12{,}94$. Der dort in der Nähe liegende Tiefpunkt ist $T_0(-20/-0{,}3)$. Die Abweichung der Nullstellen von den Tiefpunkten beträgt also $n=\vert-7{,}06\vert$. Damit liegen die Nullstellen im betrachteten Intervall bei $N_1(52{,}94/0)$; $N_2(67{,}06/0)$; $N_3(132{,}94/0)$ und $N_4(147{,}06/0)$, der Eimer ist also in den Zeitintervallen $[52{,}94;67{,}06]$ und $[132{,}94;147{,}06]$ unter Wasser. Punkte einzeichnen und Skizze: 	6	8	1
b)	$f'(t)=\frac{2\cdot\pi}{40}\cos\left(\frac{\pi}{40}t\right)=\frac{\pi}{20}\cos\left(\frac{\pi}{40}t\right)=\frac{\pi}{20}\sin\left(\frac{\pi}{40}(t+20)\right)$ Beschreiben ein Sinusterm und ein Kosinusterm dieselbe Funktion, so sind Amplitude, Ruhelage und Periodenlänge und damit Frequenz gleich. Nur in der Phasenverschiebung unterscheiden sich die Terme. Verwendet man eine Sinusfunktion anstelle einer Kosinusfunktion, so muss diese um eine Viertelperiode nach links verschoben werden, hier also $t+20$. (Alternative Lösungen möglich)			

	Zum Beispiel: Die momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit des Wasserrads ist genau 20 Sekunden nach Beginn der Betrachtung Null, das heißt, dass der Eimer sich an der höchsten oder niedrigsten Stelle des Wasserrads befindet (aus der Skizze ersichtlich: er befindet sich an der höchsten Stelle).		3	1
c)	Die Berechnung ergibt $\frac{1}{100-20}\cdot\int_{20}^{100} f(t)\,dt=\frac{1}{80}\left[F(t)\right]_{20}^{100}=1{,}7$. Interpretation: Der betrachtete Eimer befindet sich im Zeitraum zwischen $t=20$ Sekunden und $t=100$ Sekunden in einer durchschnittlichen Höhe von 1,7m über der Wasseroberfläche. Es gilt: $\frac{1}{a+80-a}\cdot\int_{a}^{a+80} f(t)dt=\frac{1}{80}\left[-\frac{80}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{40}\cdot t\right)+1{,}7\cdot t\right]_{a}^{a+80}$ $=\frac{1}{80}\left[-\frac{80}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{40}\cdot(a+80)\right)+1{,}7\cdot(a+80)-\left(-\frac{80}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{40}\cdot a\right)+1{,}7\cdot a\right)\right]$ $=\frac{1}{80}\cdot 1{,}7a+\frac{1}{80}\cdot 1{,}7\cdot 80-\frac{1}{80}\cdot 1{,}7a=1{,}7$ Erläuterung: Die Kosinus-Terme heben sich wegen der Periodizität mit der Periodendauer 80 auf. Der Mittelwert über eine Periodendauer ergibt immer die Höhe 1,7, die Verschiebung des Graphen von f auf der y-Achse.	1	1	4
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**12**	**6**

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Es gilt: $a = 3$, $b = 1$.

Für die Produktion einer ME von S_1 werden 2 ME von H_1, 1 ME von H_2 und 3 ME von H_3 benötigt.

Von S_1 fließen 2 ME in die Produktion einer ME von K_1 und 4 ME in die Produktion einer ME von K_2 ein.

Mit dem Ansatz $M = B * C_{SK}$ folgt: $c = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ und $d = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 12$.

Es gilt $\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 35 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1267 \end{pmatrix}$. Die gesamten Materialkosten der Sortimente betragen dann 1267 €.</td><td>5</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Mit Hilfe der geeigneten TR-Funktion (oder mit der erweiterten Matrix $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ und mit dem Gauß-Algorithmus) folgt $(C_{SK})^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

Mit dem Ansatz $C_{SK} * \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 140 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 220 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$.
Es können 50 ME von Karton K_1 und 30 ME von K_2 hergestellt werden.

Zum Beispiel mit $\begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ folgt mit $s = -2 \cdot k_1$ ein Widerspruch: Mit positiven k_1 ME von K_1 ergeben sich negative ME der Sortimente. Also können die gleichen Mengeneinheiten der Sortimente nicht vollständig aufgebraucht werden.</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es gilt: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ a \end{pmatrix}$.

Aus $\begin{bmatrix} 2x + 4y = 180 \\ x + 2y = 90 \end{bmatrix}$ folgt $\begin{bmatrix} x + 2y = 90 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$. Das LGS hat eine Zeile und zwei Variablen, deshalb ist es mehrdeutig lösbar.

Es gilt z.B.: $\mathbb{L} = \{(90 - 2y; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Es gilt $\begin{bmatrix} x + 2y = 90 \\ 0 = -90 + a \end{bmatrix}$. Für alle reellen Zahlen ungleich 90 anstelle von a entsteht in der zweiten Zeile ein Widerspruch und somit keine Lösung für das LGS.</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>7</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table>

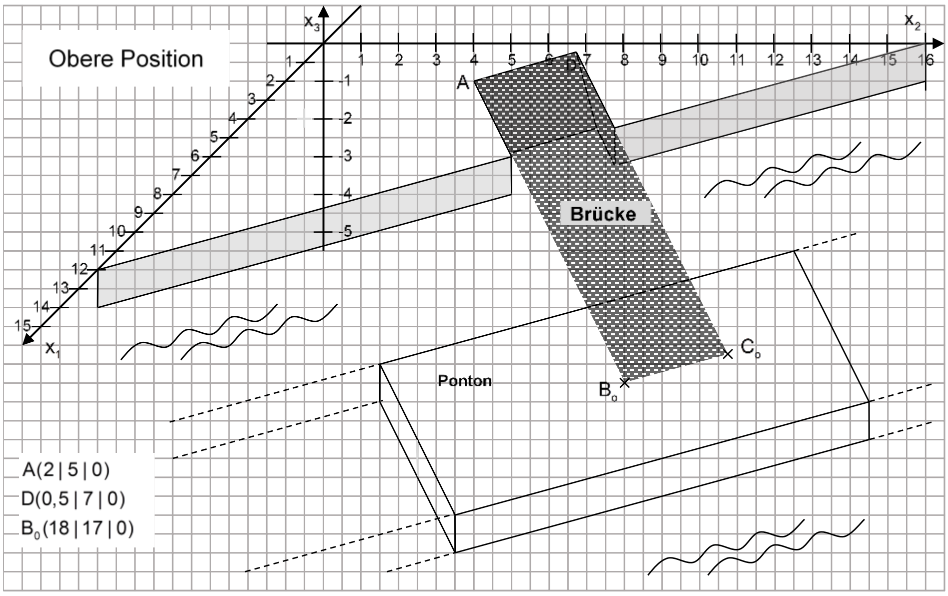
Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Mit $\overrightarrow{AB_0} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\overrightarrow{AB_0} * \overrightarrow{AD} = 0$, also sind die beiden Vektoren sind orthogonal.

Da $\left|\overrightarrow{AB_0}\right| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$, ist die Brücke 20 Meter lang.

Die Rechnung $\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,5 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $C_0(16,5 \mid 19 \mid 0)$.



Zeichnung</td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Mit $\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt die Parametergleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$).

Da die dritte Koordinate des Stützvektors und des Richtungsvektors der Geraden g gleich null ist, liegt diese Gerade in der x_1x_2-Ebene. Da die dritte Koordinate des Richtungsvektors von h ungleich null ist, schneidet h die x_1x_2-Ebene, und zwar in Punkt $A(2 \mid 5 \mid 0)$, der nicht zu g gehört. Somit sind die Geraden windschief.

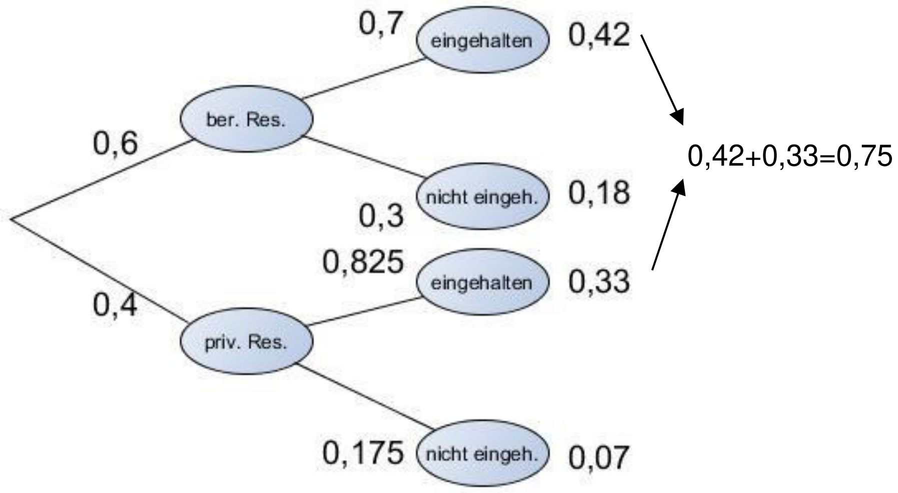
Z.B.: Da M_1 und M_2 in den ersten beiden Koordinaten übereinstimmen, muss dies bei F ebenso der Fall sein. Gesucht wird also ein Punkt $F(6 \mid 8 \mid f_3)$ auf der Geraden h:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$$\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\7{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\f_3\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\Rightarrow\ s=0{,}4\\\left.\begin{matrix}\Rightarrow\ s=0{,}4\\ \end{matrix}\right\}\Rightarrow f_3=0{,}4\cdot(-2{,}5)=-1\end{matrix}$$
und somit $F(6\,|\,8\,|\,-1)$.</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Mit $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1{,}5\\2\\0\end{pmatrix}$ und der Geraden $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\7{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$ ergibt sich die Parametergleichung der Ebene $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\7{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\2\\0\end{pmatrix}$ $(s,t\in\mathbb{R})$.
Der Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E und einer Vertikalen ergibt sich durch:
$$\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}4\\3\\25\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\3\\25\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{25}{\sqrt{650}}\text{ und }\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{650}}\right)\approx 11{,}3^\circ>10^\circ\ .$$
Die Brücke ist zu steil für den Rollstuhlfahrer ohne Hilfe.</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>7</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
a)	Mögliche Erläuterung: Die Anzahl reservierter Zimmer kann stufenweise betrachtet werden, je Stufe gibt es zwei mögliche Ergebnisse: das Zimmer wird nach einer Reservierung belegt oder es wird trotz Reservierung nicht belegt. Dieses Merkmal eines binomialverteilten Zufallsversuchs erfüllt die Situation. Zudem erfordert eine Binomialverteilung Unabhängigkeit der Stufen. Für die Modellierung ist also anzunehmen, dass Stornierungen von Zimmern unabhängig sind. Dies trifft z.B. nicht zu, wenn eine Gruppe mehrere reservierte Zimmer storniert. X : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0,75$. $E(X) = 16 \cdot 0,75 = 12$ Zu erwarten sind 12 eingehaltene Reservierungen bzw. belegte Zimmer. $P(X = 16) = 0,75^{16} \approx 0,01$ Die Wahrscheinlichkeit für ein voll belegtes Hotel liegt bei ca. 1%.	3	2	
b)	Y : Anzahl belegter Zimmer, binomialverteilt mit $n = 19$ und $p = 0,75$. $P(Y = 16) = \binom{19}{16} \cdot 0,75^{16} \cdot 0,25^{3} \approx 0,15$ Die Wahrscheinlichkeit für 16 eingehaltene Reservierungen und damit für ein genau voll belegtes Hotel liegt bei ca. 15%. $P(Y > 16) = P(Y = 17) + P(Y = 18) + P(Y = 19)$ $= \binom{19}{17} \cdot 0,75^{17} \cdot 0,25^{2} + \binom{19}{18} \cdot 0,75^{18} \cdot 0,25 + 0,75^{19} \approx 0,11$ Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 16 eingehaltene Reservierungen, also dafür, dass die Zimmer nicht ausreichen, liegt bei ca. 11%.	1	3	
c)	Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten 0,6 dafür, dass eine Reservierung für eine berufliche Reise gemacht wurde, sowie 0,4 dafür, dass eine Reservierung für eine private Reise ist. Zudem ist die Wahrscheinlichkeit 0,7 für die Einhaltung von beruflich motivierten Reservierungen gegeben. Die Wahrscheinlichkeit 0,75 ist als Summe der Pfade für die Einhaltung der Reservierung zu kennzeichnen. Zur Berechnung der fehlenden Wahrscheinlichkeiten gibt es mehrere Lösungswege.			

	 Die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht eingehaltene Reservierung für eine private Reise gemacht wurde, liegt bei $\frac{0{,}07}{0{,}25} = 0{,}28 = 28\%$.	3	5	2
d)	X : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0{,}75$ Zur Bestätigung der ersten Aussage ist $P(X > 120) < 10\%$ zu überprüfen. $P(X > 120) = 1 - P(X \le 120) = 1 - 0{,}9372 = 0{,}0628 \approx 6\% < 10\%$ Die erste Aussage ist also richtig. Y : Anzahl belegter Zimmer, binomialverteilt mit $n = 75$ und $p = 0{,}75$. Zur Bestätigung der zweiten Aussage ist $P(Y > 60) < 10\%$ zu überprüfen. $P(Y > 60) = 1 - P(Y \le 60) = 1 - 0{,}8731 = 0{,}1269 \approx 13\% > 10\%$ Die zweite Aussage ist also falsch. Verkleinert sich die Anzahl der Zimmer, so verringert sich der Anteil der möglichen zusätzlichen Reservierungen, sofern die Vorgabe eingehalten werden soll. Eine größere Anzahl Zimmer ermöglicht entsprechend einen größeren Anteil zusätzlicher Reservierungen. Um eine gute Auslastung zu erzielen, ist es also zu empfehlen für das große Hotel mehr als 25% zusätzliche Reservierungen anzunehmen. *(Bei 307 Reservierungen für 240 Zimmer beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Entschädigung etwa 9%, bei 308 Reservierungen beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 10,4%. Es können etwa 28% zusätzliche Zimmer reserviert werden.)*		2	4
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**12**	**6**

Schriftliche Abiturprüfung 2016

Grundkurs Mathematik

Freitag, 29. April 2016, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

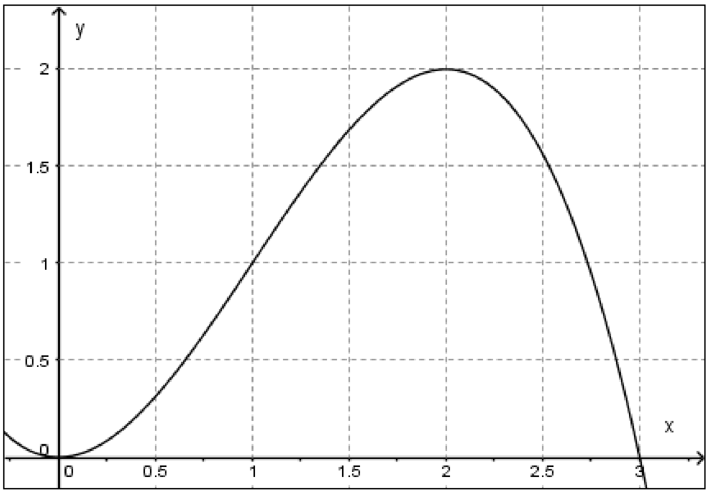
- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_1^{2,5} f(x)\,dx$.

(2 Punkte)

b) Die Funktion F ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f.

Geben Sie mithilfe der Abbildung den Wert $F'(2)$ an.

(1 Punkt)

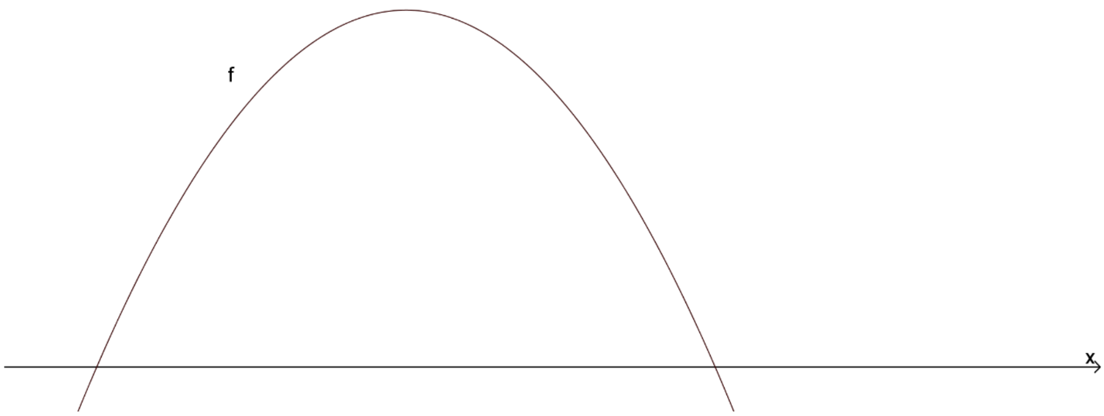
c) Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2$.

Der Graph von f hat einen Wendepunkt. Berechnen Sie die Wendestelle.

(2 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x^2 + 8$ ($x \in \mathbb{R}$) hat folgenden Graphen:



a) Zeichnen Sie die y-Achse ein. Geben Sie passende Unterteilungen der Achsen mit Zahlen an.

(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f so, dass gilt: $F(3) = 5$.

(2 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.

Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW\}$.

a) Geben Sie ein zum Zufallsexperiment passendes Baumdiagramm an.

(3 Punkte)

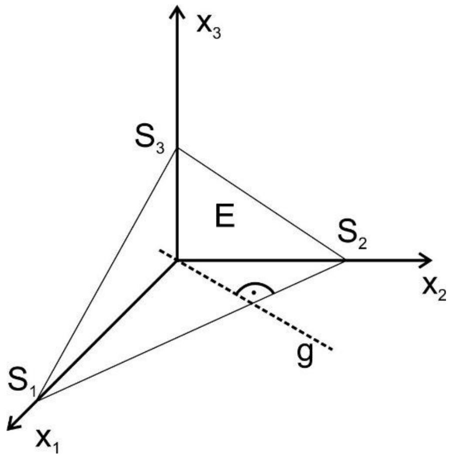
b) Begründen Sie, dass das Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

(1 Punkt)

c) Die Zufallsgröße X zählt die nötige Anzahl an Münzwürfen bis zum Versuchsende.
Berechnen Sie P(X=3).

(1 Punkt)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie



Gegeben ist die Ebene $E: 6 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 = 30$ (siehe Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass $S_1(5|0|0)$ der Schnittpunkt der Ebene E mit der x_1-Achse ist.

(1 Punkt)

b) Bestimmen Sie Koordinaten des Schnittpunkts S_3 der Ebene E mit der x_3-Achse.

(1 Punkt)

c) Gegeben sind die Punkte $S_1(5|0|0)$ und $S_2(0|3|0)$. Die Gerade g verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems und steht senkrecht zur Strecke $\overline{S_1S_2}$. Bestimmen Sie eine Parametergleichung von g.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Ein Unternehmen produziert aus zwei Rohstoffen R_1, R_2 die zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und aus diesen die zwei Endprodukte E_1, E_2. Der Produktionszusammenhang ist aus den folgenden Tabellen ersichtlich:

	Z_1	Z_2
R_1	4	5
R_2	3	2

	E_1	E_2
Z_1	a	3
Z_2	b	4

	E_1	E_2
R_1	13	32
R_2	8	17

a) Die Kosten für die Rohstoffe betragen 1 € für eine Mengeneinheit von R_1 und 2 € für eine Mengeneinheit von R_2. Bestimmen Sie die Kosten für eine Produktion von jeweils einer Mengeneinheit von Zwischenprodukt Z_1 und einer Mengeneinheit von Z_2.

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie für den obigen Produktionszusammenhang geeignete Werte für a und b.

(3 Punkte)

Schriftliche Abiturprüfung 2016 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (CAS)

Freitag, 29. April 2016, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 165 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Elektroautos **[Logo: Elektrische Tanksäule]**

Die Akku-Ladezeiten von Elektroautos sind sehr unterschiedlich. Mit einem normalen Haushaltsanschluss dauert es bis zu 16 Stunden, neuere Technologien ermöglichen das Laden innerhalb einer Stunde. In dieser Aufgabe werden verschiedene Ladevorgänge untersucht. Die Geschwindigkeit, mit der ein Akku aufgeladen wird, wird im Folgenden als Ladegeschwindigkeit bezeichnet und in Kilowatt (kW) angegeben[1].

a) Von einem Akku-Ladevorgang kennt man folgende Eigenschaften: Zu Beginn beträgt die Ladegeschwindigkeit $3{,}7\,\text{kW}$. Zehn Stunden nach Beginn ist die Ladegeschwindigkeit auf 0 kW gesunken, auch die momentane Änderungsrate der Ladegeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt $0\,\text{kW}$ pro Stunde.

Bestimmen Sie eine Funktion g vierten Grades mit $g(t) = a \cdot t^4 + b \cdot t^3 + c$, die diesen Ladevorgang modelliert. Dabei ist $g(t)$ die Ladegeschwindigkeit in kW und t die Zeit in Stunden seit Beginn des Ladevorgangs.

(7 Punkte)

In den folgenden Aufgabenteilen wird ein anderer Ladevorgang betrachtet. Die Funktion f mit

$$f(t) = 4{,}125 \cdot t^4 - 11 \cdot t^3 + 22 \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le t \le 2$$

modelliert die Ladegeschwindigkeit. Dabei gibt $f(t)$ die Ladegeschwindigkeit in kW und t die Zeit in Stunden seit Beginn des Ladevorgangs an. Der Graph von f ist im Anhang 1 abgebildet.

Einige Lademöglichkeiten	
max. 3,7 kW	Steckdose [Foto Steckdose]
max. 11 kW	Wallbox [Foto Wallbox]
max. 22 kW	Ladestation [Foto Ladestation]

b) **Berechnen** Sie für $t = 0$ und $t = 1$ jeweils die Ladegeschwindigkeit.

Geben Sie passende Werte für die Markierungsstriche der x- und y-Achse im Anhang 1 **an**.

Die Nullstelle $t_N = 2$ markiert das Ende des Ladevorgangs. **Zeigen** Sie, dass die momentane Änderungsrate der Ladegeschwindigkeit zu Beginn und am Ende des Ladevorgangs 0 kW pro Stunde beträgt.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Ladegeschwindigkeit am stärksten abnimmt.

(10 Punkte)

c) In diesem Aufgabenteil geht es um die Lademenge, d.h. die Energie, die im Laufe des Ladevorgangs in dem Akku gespeichert wird. Die Funktion F mit

$$F(t) = 0{,}825 \cdot t^5 - 2{,}75 \cdot t^4 + 22 \cdot t \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le t \le 2$$

modelliert die momentane Lademenge des Akkus. Dabei ist $F(t)$ die Lademenge in Kilowattstunden (kWh) und t die Zeit in Stunden nach Beginn des Ladevorgangs.

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Zeichnen Sie den Graph von F in das Koordinatensystem im Anhang 2.

[1] Die Geschwindigkeit in Kilowatt ergibt sich über die geladene Energie in Kilowattstunden pro Stunde.
Es gilt: $\text{Ladegeschwindigkeit} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}$. Einheit: $\frac{\text{kWh}}{\text{h}} = \text{kW}$.

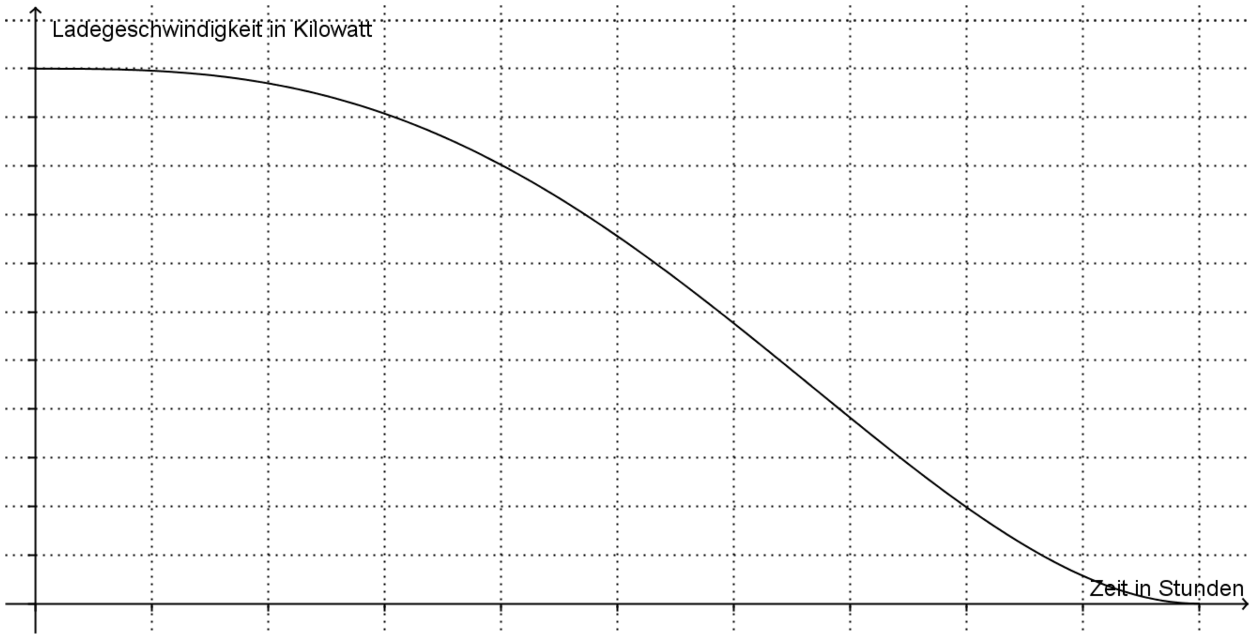
Veranschaulichen Sie das Ergebnis von $F(1{,}2)$ in der Grafik im Anhang 1.

Am Ende des Ladevorgangs, zum Zeitpunkt $t = 2$, ist der Akku mit 28 kWh voll geladen. **Berechnen** Sie die Lademenge L, die zu Beginn des Ladevorganges noch im Akku gespeichert war.

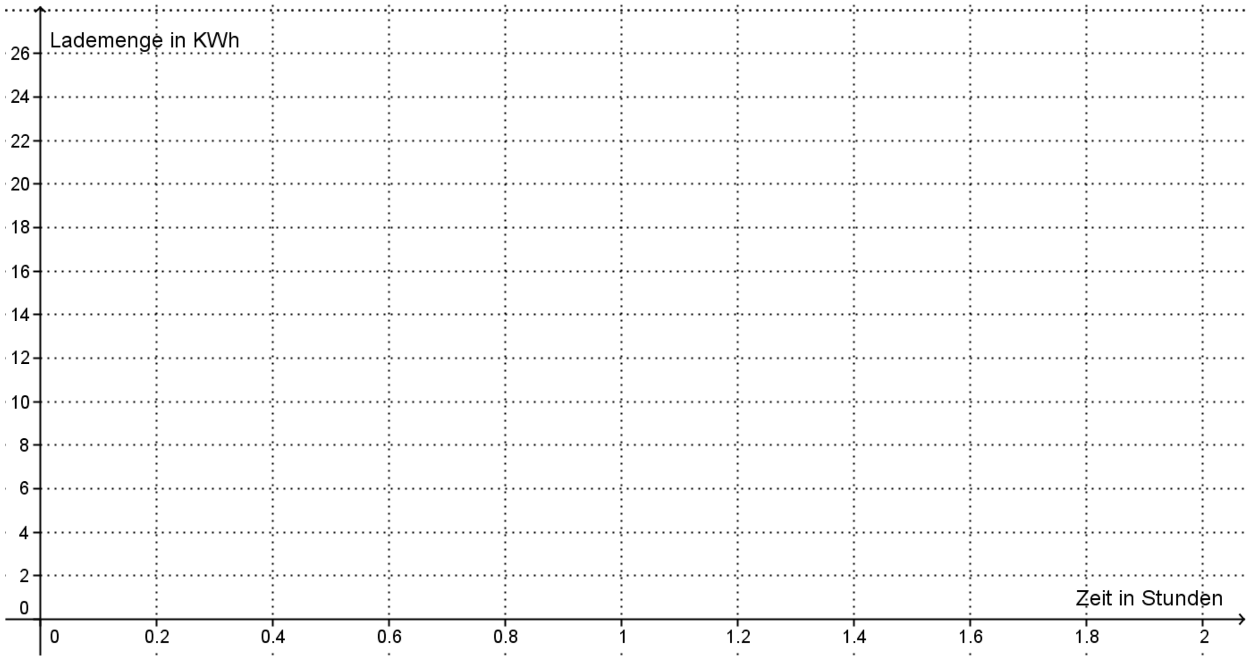
Der Hersteller eines Auto-Akkus rät, den Akku nur zu 90% zu laden, damit er länger hält. **Ermitteln** Sie unter Verwendung von L einen Ansatz, mit dem man den Zeitpunkt bestimmen kann, zu dem der Akku im Laufe dieses Ladevorgangs genau zu 90% geladen ist.

(8 Punkte)

Anhang 1



Anhang 2



Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Beliebte Bilder

[Logo: Like]

Die 960 aktiven Sportler eines Vereins kommunizieren in einem sozialen Netzwerk miteinander und laden in ihrer Gruppe auch Bilder hoch. Wem ein solches Bild gefällt, der zeigt dies, indem er den *Like-Button* anklickt. Nach der Meisterfeier werden einige witzige Fotos hochgeladen, auf die viele Vereinsmitglieder bereits sehnsüchtig gewartet haben.

Die Funktion f modelliert die **Geschwindigkeit**, mit der eines dieser beliebten Bilder *Like-Klicks* erhält.

Dabei steht $t \geq 0$ für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und f(t) für die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute zum Zeitpunkt t.

In einem ersten Versuch wird f mit einer Exponentialfunktion der Form $f(t) = c \cdot a^t$ modelliert. Zu Beginn ist die Geschwindigkeit 2 *Like-Klicks* pro Minute, nach 42 Minuten liegt sie noch bei 1,8 *Like-Klicks* pro Minute.

a) **Erläutern** Sie, warum im Term von f für den Wert a gilt a<1.

Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Angaben die zur Funktion f gehörige Gleichung. Runden Sie den Wert a auf vier Nachkommastellen.

(5 Punkte)

Die Funktion f lässt sich auch in der folgenden Form darstellen: $f(t) = 2 \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}$. Dabei steht $t \geq 0$ wieder für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und f(t) für die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute zum Zeitpunkt t, also für die **Geschwindigkeit**, mit der das beliebte Bild *Like-Klicks* erhält.

b) **Berechnen** Sie, wie schnell das Bild nach 300, 600 sowie nach 900 Minuten *Like-Klicks* erhält.

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f in Abbildung 1.

Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zur Funktion f.

Berechnen Sie, wie viele Sportler in den ersten fünf Stunden den *Like-Button* angeklickt haben und **veranschaulichen** Sie ihr Ergebnis in Ihrer Skizze in Abbildung 1.

(8 Punkte)

Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute

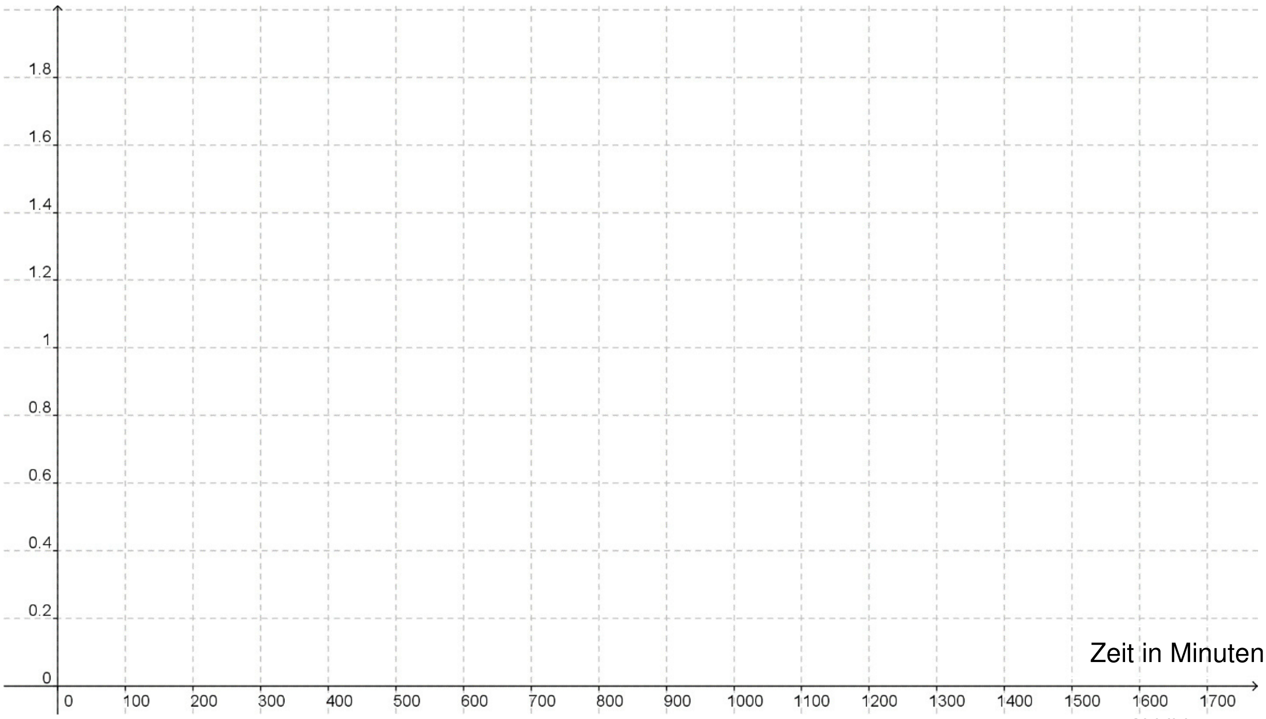

1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Zeit in Minuten
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700

Abbildung 1

Im Folgenden wird die **Gesamtanzahl** der *Like-Klicks* betrachtet, die das Bild erhält. Diese Gesamtanzahl der *Like-Klicks* gibt die Funktion G an mit

$$G(t) = 801 - 800 \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}\ .$$

Dabei steht $t \geq 0$ wieder für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und G(t) für die Gesamtanzahl der *Like-Klicks* zum Zeitpunkt t.

c) **Erläutern** Sie, warum auch G eine Stammfunktion zur Funktion f ist.

Bestimmen Sie, nach welcher Zeit 70% der 960 Sportler den *Like-Button* angeklickt haben.

Geben Sie G(0) sowie $\lim\limits_{t \to \infty} G(t)$ **an** und **interpretieren** Sie beide Werte im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

[Logo: Like]

In der Gruppe wird ein weiteres Foto von der Meisterfeier hochgeladen.
Die **Gesamtanzahl** der *Like-Klicks*, die dieses beliebte Bild erhält, gibt die Funktion L an mit

$$L(t) = \frac{750}{1 + 124 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}}\ .$$

Dabei steht $t \geq 0$ wieder für die Zeit in Minuten und L(t) für die Anzahl der *Like-Klicks* zum Zeitpunkt t.

d) **Berechnen** Sie, wie viele Sportler gleich zu Beginn den *Like-Button* angeklickt haben.

Der Graph der Funktion L ist in Abbildung 2 zu sehen. **Zeichnen** Sie bei $L(t) = \frac{750}{2}$ den Wendepunkt W.

Beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen von L im Sachzusammenhang.

Erläutern Sie, inwieweit der Wendepunkt W eine „Trendwende" beim *Liken*[1] des Bildes markiert.

(6 Punkte)

[1] Das englische Wort *like* wird gemäß der deutschen Grammatik gebeugt, um den Text einfach zu halten.

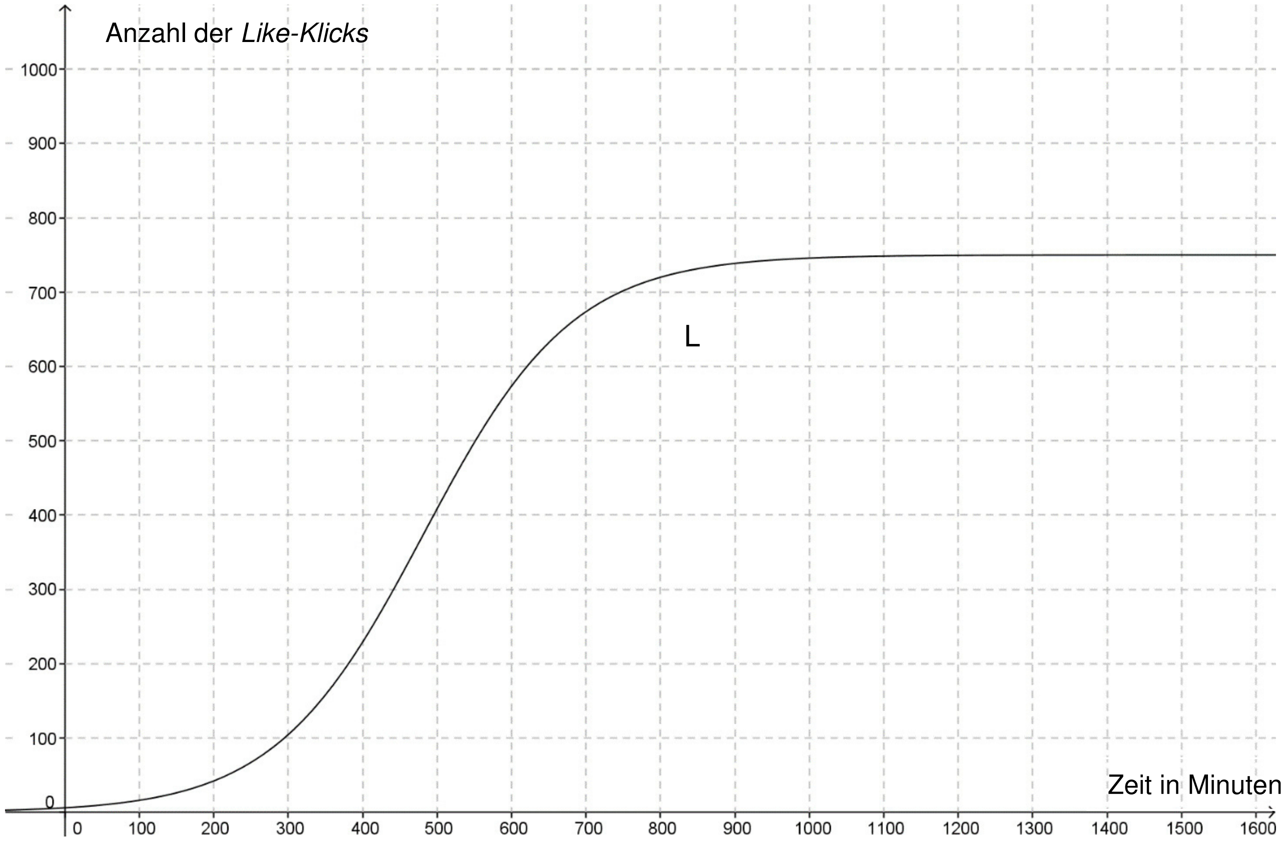

Anzahl der *Like-Klicks*
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
L
Zeit in Minuten
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600

Abbildung 2

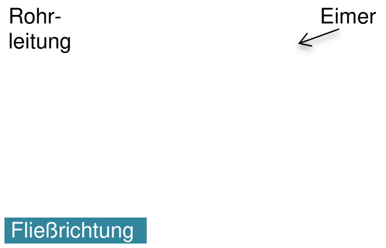
Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Wasserschöpfräder

Als Bewässerungssystem spielen Wasserschöpfräder in vielen Entwicklungsländern eine wichtige Rolle.

Ein Schöpfrad ist ein rotierendes Wasserrad, an dessen Rand Wassereimer befestigt sind. Ein Teil des Schöpfrads taucht ins Wasser ein. Die Eimer füllen sich mit Wasser, wenn sie in den Fluss eintauchen. Im Bereich des höchsten Punktes des Rades entleert sich der Inhalt der Eimer dann in ein Auffangbecken. Von dort fließt das Wasser in einen Bewässerungskanal.
Wir betrachten die Drehung eines Wasserschöpfrads über einen Zeitraum von 150 Sekunden. In dieser Zeit bewegen sich die Wassereimer gleichmäßig im Kreis.



[Abb. 1 - schematische Zeichnung eines Wasserschöpfrads]

[Abb. 2 – historisches Wasserschöpfrad in Bayern]

Die Funktion f mit

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{40}t\right) + 1{,}7\,; \quad t \in \mathbb{R},$$

beschreibt für $t \in [0;150]$ den Abstand eines Punktes am äußeren Rand eines bestimmten Eimers von der Wasseroberfläche. Wenn im Folgenden „Eimer“ geschrieben wird, so ist dieser Punkt gemeint. t ist die Zeit in Sekunden, $f(t)$ der Abstand in Meter.[1]

a) Die Funktion f wird im Folgenden im Intervall [0;150] näher untersucht.

Berechnen Sie für $t = 0$ Sekunden den Abstand des Eimers von der Wasseroberfläche.

Geben Sie die Amplitude der Funktion f **an**, **berechnen** Sie die Periodenlänge und **interpretieren** Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte im betrachteten Intervall **an** und **erläutern** Sie, wie Sie mit Hilfe der Parameter der allgemeinen Funktionsgleichung die Koordinaten des ersten Hochpunkts bestimmen können.

Berechnen Sie ohne Verwendung der CAS-Funktionen Ihres Rechners, in welchen Zeitintervallen der Eimer unter Wasser ist.

Skizzieren Sie den Graphen im Koordinatensystem im Anhang.

(15 Punkte)

b) **Begründen** Sie, dass

$$f'(t) = \frac{\pi}{20}\sin\left(\frac{\pi}{40}(t+20)\right)$$

ein Funktionsterm der Ableitungsfunktion f' ist.

Es gilt: $f'(20) = 0$.

Erläutern Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(4 Punkte)

[1] Negative Funktionswerte bedeuten, dass der Eimer sich unterhalb der Wasseroberfläche befindet.

c) Die Funktion F mit

$$F(t) = -\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{40}\,t\right) + 1{,}7\,t$$

ist eine Stammfunktion der Funktion f.

Berechnen Sie

$$\frac{1}{100-20} \cdot \int_{20}^{100} f(t)dt\,.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

Berechnen Sie ohne Verwendung der CAS-Funktionen Ihres Rechners

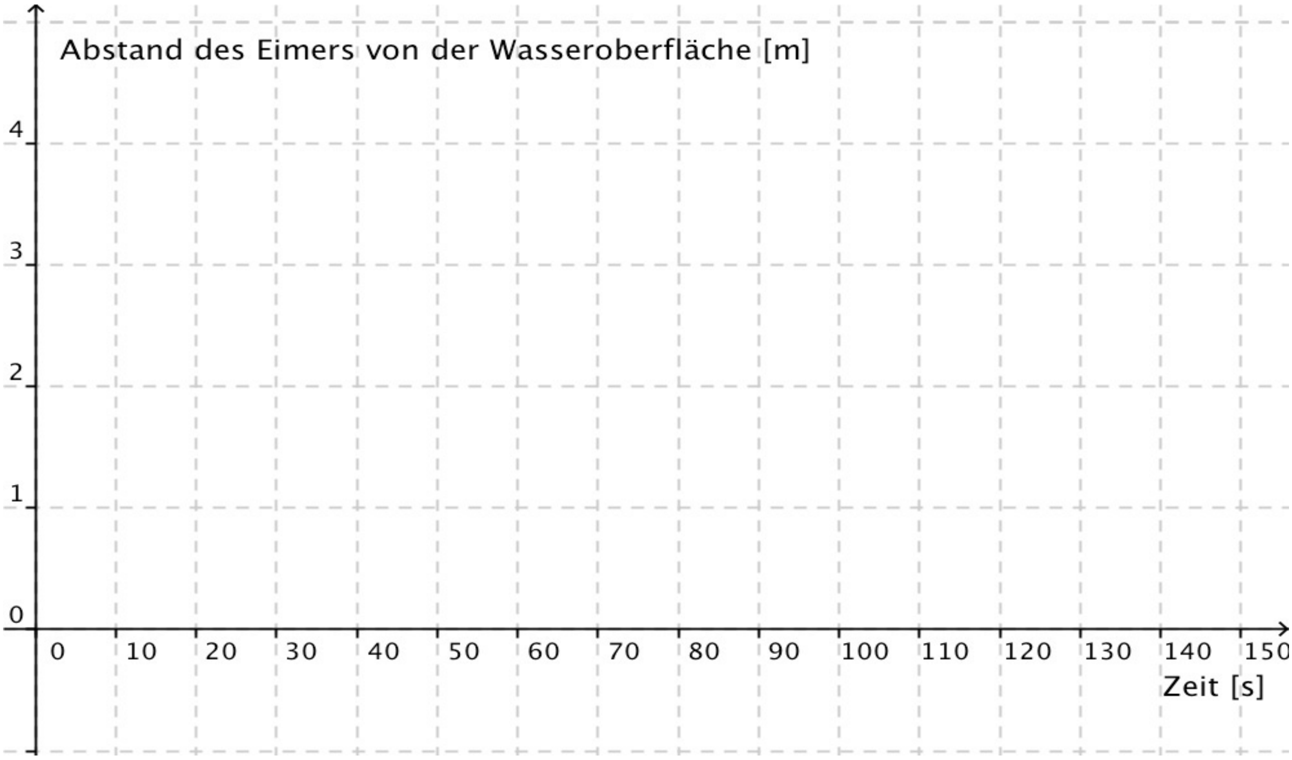
$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{1}{b-a} \cdot \left(F(b) - F(a)\right) \text{ für } b = a + 80$$

Erläutern Sie, was dieses Ergebnis aussagt.

(6 Punkte)

Bildnachweise: http://static.panoramio.com/photos/original/21748629.jpg (20.1.2016)
http://www.leifiphysik.de/sites/default/files/medien/schoepfrad_regeneratenergie_ges.gif (20.1.2016)

Anhang


Abstand des Eimers von der Wasseroberfläche [m]
4
3
2
1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
Zeit [s]

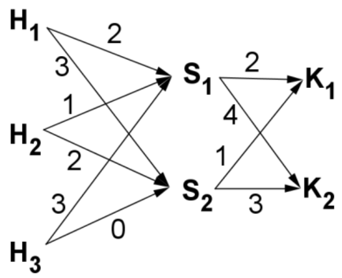
Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

CAS

Spielzeug

Ein holzverarbeitender Betrieb stellt für Spielzeuggeschäfte Holzteile her:
In der ersten Produktionsstufe werden aus drei Holzteilen H_1, H_2 und H_3 zwei Sortimente S_1 und S_2 zusammengestellt. In der zweiten Produktionsstufe werden aus diesen Sortimenten zwei Kartons K_1 und K_1 (Verpackungen) produziert, die den Spielzeuggeschäften angeboten werden.

Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Holzteile zu je einer ME eines Sortimentes und wie viele ME der einzelnen Sortimente in je eine ME eines Kartons eingehen:



Gegeben sind die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C_{SK} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} c & 17 \\ 4 & 10 \\ 6 & d \end{pmatrix}$.

a) Für bestimmte Zahlen a und b ist B die Produktionsmatrix zur ersten Produktionsstufe.
Geben Sie für die Produktionsmatrix B die Zahlen a und b **an**.

Die Matrix C_{SK} ist die zur zweiten Produktion zugehörige Produktionsmatrix.
Erläutern Sie die Bedeutung der ersten Spalte von B und der ersten Zeile von C_{SK} im Sachzusammenhang.

Die Matrix M ist die zu B und C_{SK} gehörige Bedarfsmatrix, wenn man für c und d bestimmte Zahlen einsetzt. (Die Bedarfsmatrix gibt an, wie viele ME der einzelnen Holzteile in je eine ME eines Kartons eingehen.)
Bestimmen Sie diese Zahlen für c und d der Bedarfsmatrix M.

Betrachtet wird im Folgenden die zweite Produktionsstufe:
Die Materialkosten des Sortiments S_1 betragen 5 € je ME und die von S_2 betragen 3 € je ME.
Es sollen 35 ME Kartons von K_1 und 28 ME von K_2 produziert werden.

Bestimmen Sie mit Matrix-Vektor-Rechnungen die gesamten Materialkosten der Sortimente, die sich durch die Fertigung der Kartons ergeben.

(11 Punkte)

b) **Bestimmen** Sie zu C_{SK} die inverse Matrix $\left(C_{SK}\right)^{-1}$.

(Zur Kontrolle: $\left(C_{SK}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$)

Der Betrieb hat 220 ME von Sortiment S_1 und 140 ME von S_2 auf Lager. Es sollen alle Sortimenteinheiten verbraucht werden.

Bestimmen Sie mithilfe der Matrix $\left(C_{SK}\right)^{-1}$ jeweils die ME der Kartons, die daraus hergestellt werden können.

Der Betrieb hat bei einer anderen Produktion nun von jedem Sortiment gleich viele ME auf Lager und möchte diese bei der Produktion der Kartons vollständig verbrauchen.
Untersuchen Sie, ob dieses möglich ist.

(7 Punkte)

c) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\begin{bmatrix} 2x+4y=180 \\ x+2y=a \end{bmatrix}$ mit $x,y,a \in \mathbb{R}$.

Geben Sie zum LGS eine zugehörige Matrix-Vektorgleichung **an**.

Zeigen Sie, dass das LGS für $a=90$ mehrdeutig lösbar ist und
bestimmen Sie die zugehörige Lösungsmenge.

Bestimmen Sie für a alle Zahlen, für die das LGS nicht lösbar ist.

(7 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie CAS

Martinianleger

Am Weserufer in Bremen legen Schiffe am Martinianleger an. Vor der Ufermauer senkt und hebt sich ein Ponton an senkrechten Pfählen bei Ebbe und Flut. Fußgänger gelangen über eine Brücke vom Ufer zum Ponton (siehe Abbildungen 1 und 2).

Die Zeichnungen im Material in den Abbildungen 3 und 4 zeigen einen Ausschnitt des Martinianlegers bei zwei verschiedenen Wasserständen.
Eine Einheit entspricht einem Meter.

BTZ Bremer Touristik-Zentrale (www.bremen-tourismus.de)

[Abbildung 1 – Martinianleger]

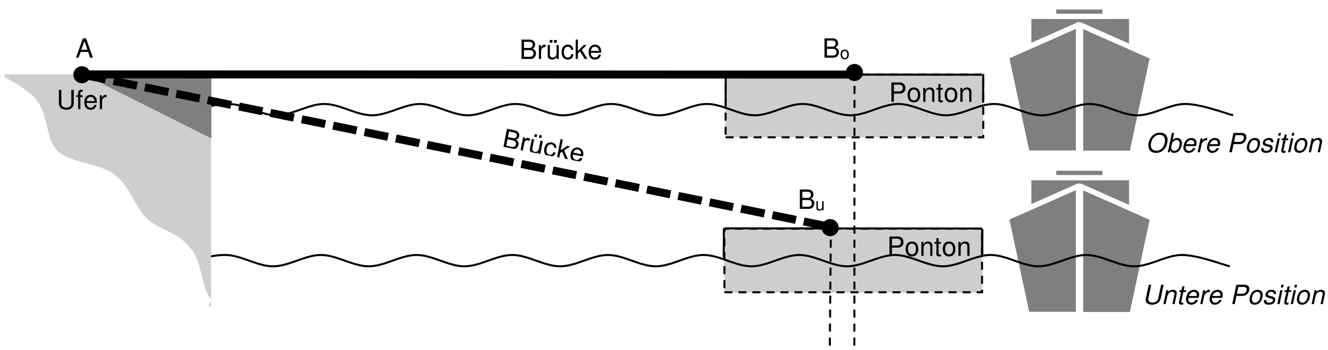


Abbildung 2 – Positionen des Pontons, seitliche Ansicht, schematische Darstellung

a) In diesem Aufgabenteil sind die begehbare Fläche des Pontons und die Brücke in gleicher Höhe wie die Uferpromenade, siehe die obere Position der Abbildung 2 und im Material die Abbildung 3.

Die Brücke ist am Ufer an den Punkten $A(2\,|\,5\,|\,0)$ und $D(0{,}5\,|\,7\,|\,0)$ befestigt und liegt auf dem Ponton nur auf. Die Aufliegepunkte sind in dieser Position $B_o(18\,|\,17\,|\,0)$ und C_o.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_o}$ und $\overrightarrow{AD}$ zueinander orthogonal sind.

Zeigen Sie, dass die Länge der Brücke 20 Meter beträgt.

Bestimmen Sie Koordinaten für den Punkt C_o, so dass die Brückeneckpunkte A, B_o, C_o und D ein Rechteck bilden und **zeichnen** Sie die Brücke als Rechteck im Koordinatensystem im Material in Abbildung 3 ein.

(9 Punkte)

Der Wasserstand ist nun gesunken, der Ponton ist tiefer als die Uferpromenade und die Brücke ist geneigt, siehe untere Position in Abbildung 2 und im Material die Abbildung 4. Die Zeichnung im Koordinatensystem in Abbildung 4 hilft für die folgenden Aufgaben:

b) Die Uferkante verläuft entlang der Geraden g durch die Punkte $U(12\,|\,0\,|\,0)$ und $V(0\,|\,16\,|\,0)$.
Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g.

Eine Brückenseite geht entlang einer Geraden h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Der Stützpunkt $A(2\,|\,5\,|\,0)$ liegt nicht auf der Geraden g.
Beschreiben Sie die Lage der Geraden g im Koordinatensystem. **Folgern** Sie daraus, dass die Geraden g und h windschief sind.

Der Einschnitt in die Ufermauer wird an der linken Seite durch die Kante $\overline{M_1M_2}$ mit $M_1(6\,|\,8\,|\,0)$ und $M_2(6\,|\,8\,|\,-2{,}5)$ begrenzt. **Berechnen** Sie, an welcher Stelle die Brückenseite den Einschnitt der Ufermauer berührt, also den Schnittpunkt F von der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und der Geraden h.

(10 Punkte)

c) Die Brücke liegt in einer Ebene E, die durch die Gerade h (Brückenseite) und den Punkt D definiert ist.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene E.

Ein Rollstuhlfahrer möchte über die Brücke fahren. Er kann eine Neigung von 10° selbstständig bewältigen. **Entscheiden** Sie auf der Grundlage geeigneter Rechnungen, ob der Rollstuhlfahrer bei diesem Wasserstand die Brücke selbstständig befahren kann.

(6 Punkte)

Material:

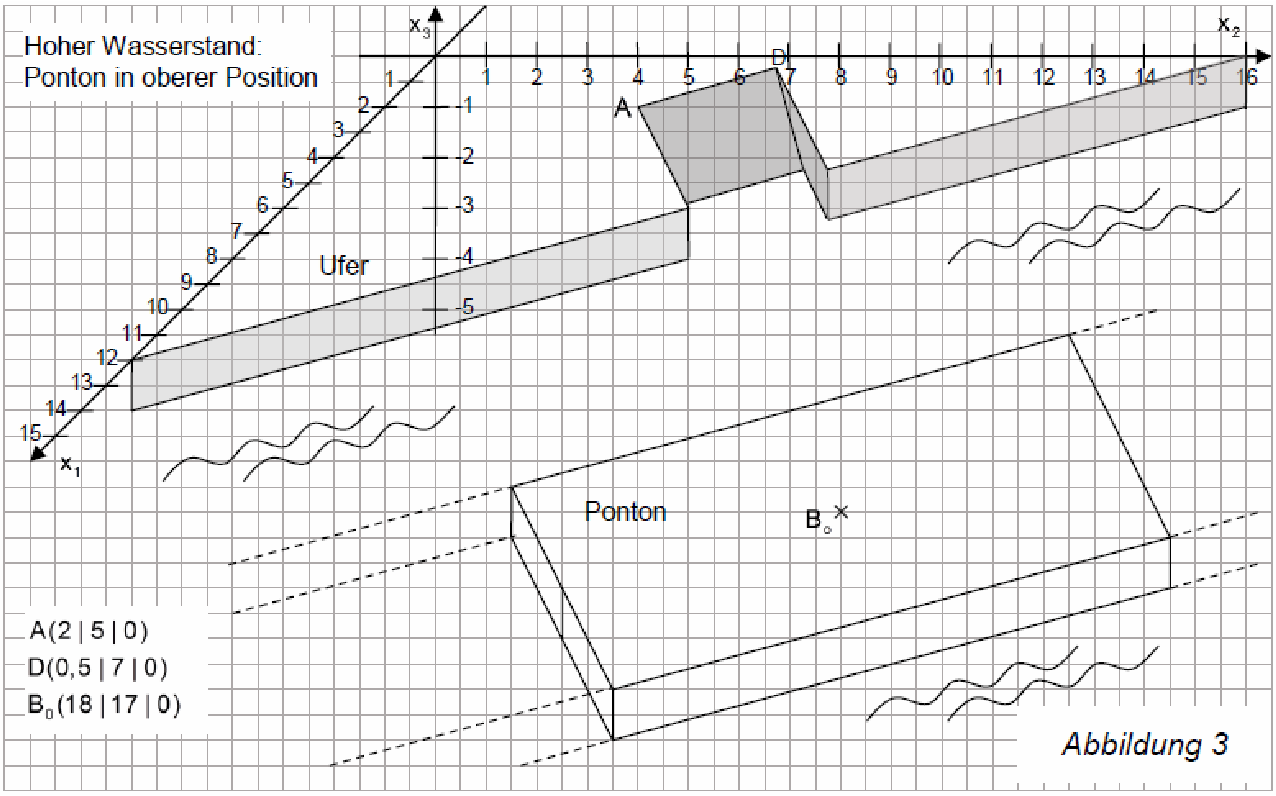


Abbildung 3

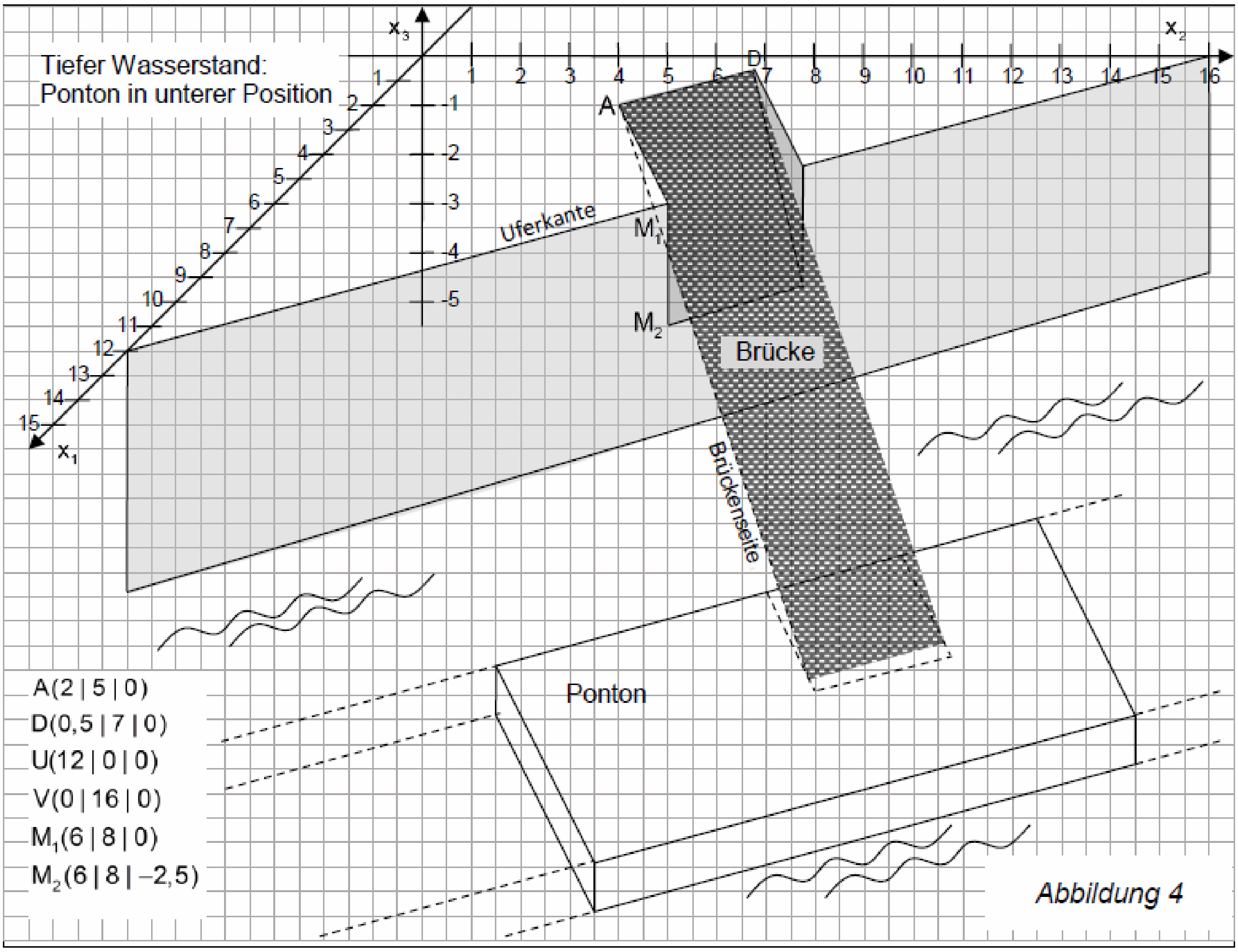


Abbildung 4

Teil 2 – Aufgabe 6 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik CAS

Bremer Hotels in der Vorweihnachtszeit

[Foto Bremer Marktplatz]

In der Vorweihnachtszeit übernachten viele Menschen in Bremer Hotels. Viele Zimmer in den Hotels werden daher frühzeitig reserviert. Einige werden jedoch kurzfristig wieder storniert, da die jeweiligen Gäste die Reise nach Bremen doch nicht antreten.

Erscheinen die jeweiligen Gäste, um ihr reserviertes Zimmer zu beziehen, so gilt die Reservierung als eingehalten. Im Folgenden ist davon auszugehen, dass 75% der Reservierungen eingehalten werden. Runden Sie berechnete Wahrscheinlichkeiten auf zwei Nachkommastellen oder geben Sie diese als ganzzahlige Prozentwerte an.

a) Ein kleines Hotel verfügt über 16 Zimmer. Alle Zimmer wurden für einen Tag in der Vorweihnachtszeit bereits frühzeitig reserviert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl eingehaltener Reservierungen an und ist binomialverteilt mit $p = 0{,}75$.

   Erläutern Sie, unter welchen Annahmen es gerechtfertigt ist, den Sachkontext mit einer Binomialverteilung zu modellieren.

   Geben Sie **an**, wie viele belegte Zimmer für diesen Tag zu erwarten sind.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Zimmer an diesem Tag belegt werden.

   (5 Punkte)

b) Der Geschäftsführer des kleinen Hotels mit den 16 Zimmern plant die Einnahmen zu verbessern und nimmt 19 Reservierungen für diesen Tag an.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Plan des Geschäftsführers aufgeht. Dies ist der Fall, wenn genau 16 Reservierungen eingehalten werden.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Geschäftsführer mit seinem Plan Probleme bekommt, weil nicht ausreichend Zimmer zur Verfügung stehen.

   (4 Punkte)

c) Die Bremer Hotelbetreiber gehen davon aus, dass 60% der Reservierungen für berufliche Reisen abgeschlossen werden, wohingegen 40% der Reservierungen für private Reisen sind. 70% der Reservierungen für berufliche Reisen werden eingehalten.

   Zeichnen Sie ein zweistufiges Baumdiagramm zur Situation. **Geben** Sie darin zunächst nur die vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten **an**.

   Nach wie vor gilt, dass 75% aller Reservierungen eingehalten werden. **Stellen** Sie im Baumdiagramm durch eine Markierung **dar**, wie dieser Wert hier zu erkennen ist.

   Berechnen Sie alle noch nicht angegebenen Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms und **ergänzen** Sie diese an entsprechender Stelle des Baumdiagramms.

   Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht eingehaltene Reservierung für eine private Reise gemacht wurde.

   (10 Punkte)

d) Bei der Bremer Hotelkette „La Place" ist die Vorgehensweise, mehr Reservierungen anzunehmen als Zimmer vorhanden sind, ebenfalls üblich. Wenn nicht ausreichend viele Zimmer für die Gäste zur Verfügung stehen, werden Entschädigungen gezahlt. Die Geschäftsführer der zugehörigen Hotels A (60 Zimmer) und B (120 Zimmer) treffen sich auf dem Weihnachtsmarkt und besprechen bei einem Punsch ihre Strategien. Der erfahrene Geschäftsführer des Hotels B erklärt:

   „Wir sollten die Wahrscheinlichkeit einer Entschädigungszahlung immer unter 10% halten. Diese Vorgabe bietet aber viel Spielraum. Ich nehme jetzt in der Vorweihnachtszeit 30 Reservierungen zusätzlich an, also 25% meiner Zimmeranzahl und halte dennoch die Vorgabe ein."

Beurteilen Sie unter Verwendung von Anlage 1 die Aussage des Geschäftsführers von Hotel B.

Der Geschäftsführer von Hotel B erklärt weiter:

„Mach es doch einfach genau wie ich! Dein Hotel ist halb so groß wie meins, da kannst du ohne Probleme 15 zusätzliche Reservierungen annehmen."

Beurteilen Sie unter Verwendung von Anlage 2 diese Aussage des Geschäftsführers von Hotel B.

Die Hotelkette verfügt außerdem über ein großes Hotel C, welches 240 Zimmer besitzt.

Folgern Sie, ob das große Hotel C, um eine gute Auslastung zu erzielen, unter Einhaltung der Vorgabe mehr, weniger oder genau 25% zusätzliche Reservierungen annehmen sollte.

(6 Punkte)

Bildnachweis: Jonas Ginter / Bremer Touristik Zentrale, http://www.bremen-tourismus.de/weihnachten-bremen (15.2.2016)

Anlage 1: Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung $B_{150;0,75}$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
90	0,0000	**112**	0,4937
91	0,0001	**113**	0,5688
92	0,0002	**114**	0,6418
93	0,0003	**115**	0,7104
94	0,0006	**116**	0,7726
95	0,0010	**117**	0,8267
96	0,0018	**118**	0,8721
97	0,0031	**119**	0,9088
98	0,0052	**120**	0,9372
99	0,0085	**121**	0,9583
100	0,0136	**122**	0,9734
101	0,0212	**123**	0,9837
102	0,0321	**124**	0,9904
103	0,0473	**125**	0,9946
104	0,0680	**126**	0,9971
105	0,0951	**127**	0,9985
106	0,1297	**128**	0,9993
107	0,1724	**129**	0,9997
108	0,2233	**130**	0,9999
109	0,2822	**131**	0,9999
110	0,3481	**132**	1,0000
111	0,4193		

Für $k \le 90$ gilt $P(X \le k) \approx 0$, für $k \ge 132$ gilt $P(X \le k) \approx 1$.

Anlage 2: Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung $B_{75;0,75}$

k	$P(Y \le k)$	k	$P(Y \le k)$
40	0,0000	**55**	0,4125
41	0,0001	**56**	0,5176
42	0,0003	**57**	0,6228
43	0,0006	**58**	0,7208
44	0,0014	**59**	0,8054
45	0,0030	**60**	0,8731
46	0,0062	**61**	0,9231
47	0,0120	**62**	0,9569
48	0,0223	**63**	0,9779
49	0,0393	**64**	0,9897
50	0,0657	**65**	0,9956
51	0,1046	**66**	0,9984
52	0,1585	**67**	0,9995
53	0,2286	**68**	0,9998
54	0,3143	**69**	1,0000

Für $k \le 40$ gilt $P(Y \le k) \approx 0$ für $k \ge 69$ gilt $P(Y \le k) \approx 1$.

.