Die Senatorin
für Kinder und Bildung

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2017 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421…)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 165 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Im Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.

- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den fünf vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Es dürfen nicht beide Aufgaben aus dem Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie gewählt werden. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

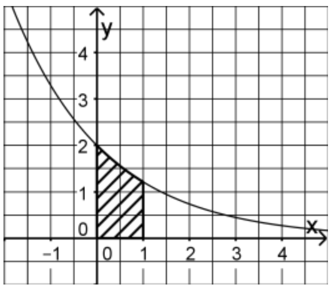
Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

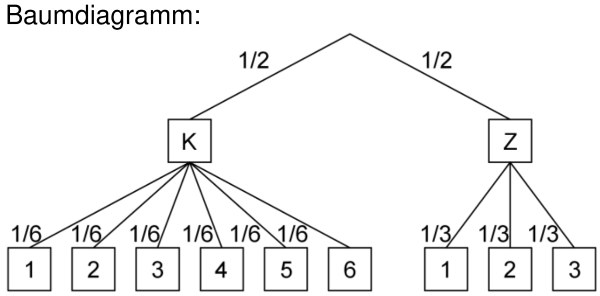
Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 1				
a)	Der Graph von f stellt die Ableitungsfunktion von g dar. In dem Bereich, in dem der Graph von g sinkt (bis $x = 0$), besitzt f negative Funktionswerte. In dem Bereich, in dem der Graph von g steigt (ab $x = 0$), besitzt f positive Funktionswerte. (Alternative Begründungen sind selbstverständlich möglich.)		2	
b)	$\int_0^k (12x^3)\,dx = \left[3x^4\right]_0^k = 3k^4$ Wegen $\left\|3k^4\right\| = 3$ folgt für $k > 0$ die Lösung $k = 1$.		1	2
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**0**	**3**	**2**

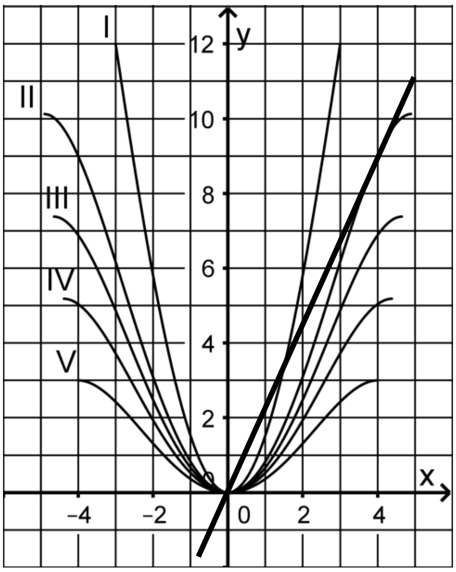
Aufgabe 2				
a)	$f(0) = 2$ und $f'(0) = -1$ führt mit $f(0) = f'(0)\cdot 0 + b$ zu $y = -x + 2$.	2		
b)	 **Term:** $\int_0^1 f(x)\,dx$	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	**0**

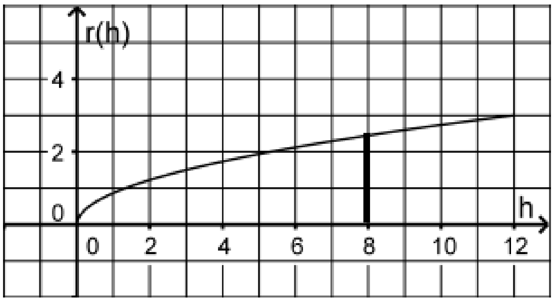
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aufgabe 3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Baumdiagramm:

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Addition der entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten:
$P(\mathit{Zahl\ ist\ gerade}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Aufgabe 4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Gerade durch A und B kann durch folgende Gleichung beschrieben werden: $g:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. Die Punktprobe mit C liefert in der ersten Zeile r=1 und in der zweiten Zeile r=0, führt also zu einem Widerspruch.</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}d-1\\-1\\5\end{pmatrix}$ und
$\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow 3\cdot(d-1)+1\cdot(-1)+1\cdot 5=0\Rightarrow d=-\frac{1}{3}$</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Aufgabe 5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der Term $A+B$ ist nicht definiert, da die Zeilenanzahlen unterschiedlich sind.
Der Term $A*B$ ist definiert, da die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es muss gelten $\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3a&3b\\a+2c&b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, damit folgt:
$a=\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{6}$, $d=\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

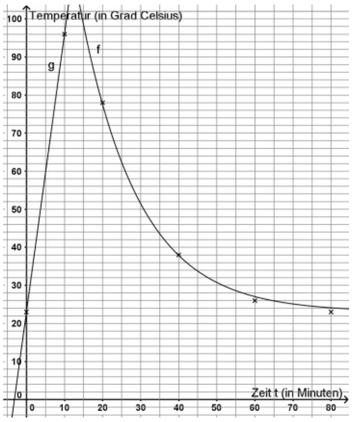
Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

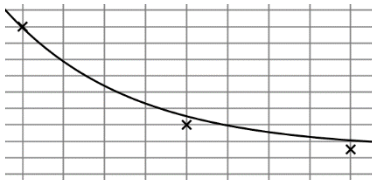
	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
a)	Der Graph V beschreibt den Längsschnitt des Likörglases. Mit $g(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^2$ und $g'(x)=4a\cdot x^3+2b\cdot x$ ergibt sich aus den Bedingungen $g(4)=3$ und $g'(4)=0$ das folgende Lineares Gleichungssystem: $\left\lvert\begin{array}{l}256a+16b=3\\256a+\ 8b=0\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{r}256a+16b=3\\8b=3\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{lr}256a & =-3\\ & 8b=\ \ 3\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l}a=-\frac{3}{256}\\b=\ \ \frac{3}{8}\end{array}\right\rvert$ Für die Funktion gilt damit: $g(x)=-\frac{3}{256}\cdot x^4+\frac{3}{8}\cdot x^2$. Mit $g''(x)=-\frac{9}{64}\cdot x^2+\frac{3}{4}$ und $g'''(x)=-\frac{9}{32}\cdot x$ ergeben sich wegen $g''(x)=0$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{16}{3}\Rightarrow x_{W_1}\approx-2{,}31\vee x_{W_2}\approx2{,}31$ und $g'''(2{,}31)\approx-0{,}65\neq0$, $g'''(-2{,}31)\approx0{,}65\neq0$ sowie $g(\pm2{,}31)\approx1{,}67$ die Wendepunkte $W_1(-2{,}31\mid1{,}67)$ und $W_2(2{,}31\mid1{,}67)$. Die Wendepunkte zeigen jeweils an, wo sich das Krümmungsverhalten des Längsschnittes ändert, er also von einer Rechts- in eine Linkskurve übergeht (und umgekehrt).	5	5	
b)	Wegen $f(3)\approx6{,}17$ befindet sich die Dekorlinie in der Höhe von etwa 6,17 cm. Wegen $2\cdot3\cdot\pi\approx18{,}85$ ist die kreisrunde Dekorlinie etwa 18,85 cm lang. Mit $f'(x)=-\frac{9}{128}x^3+\frac{27}{16}x$ folgt: $f'(4)=2{,}25=t'(4)$. Außerdem gilt: $t(4)=9$. Zeichnung der Tangente bei P:  Die Tangente verläuft durch die Punkte $O(0\mid0)$ und $P(4\mid9)$. Die Länge L des fraglichen Strohhalmabschnitts beträgt etwa 9,8 cm, denn: $L=\sqrt{4^2+9^2}\approx9{,}8$.	2	5	3

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Veranschaulichung von $r(8)$:


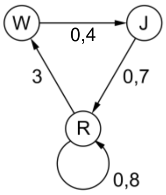
$\pi\cdot\int_0^8 \left(r(h)\right)^2 dh = \pi\cdot\int_0^8 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3h}\right)^2 dh = \pi\cdot\int_0^8 \left(\frac{3}{4}h\right) dh = \pi\cdot\left[\frac{3}{8}h^2\right]_0^8 = 24\cdot\pi \approx 75{,}4$
Das Volumen der Flüssigkeit beträgt etwa 75,4 cm^3.</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>7</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Zu b)
Bei der Bewertung der Zeichnung ist auf die Unterscheidung zwischen Mess- und Funktionswerte zu achten.

Skizze für a) und b)
$g(0)=23$ und $g(10)=96$ führt zu $g(t)=7{,}3\cdot t+23$.
$g(5)=59{,}5$ und $g'(5)=7{,}3$.
Die Temperatur der Flüssigkeit beträgt nach 5 Minuten näherungsweise 59,5°C und der Temperaturanstieg ist zu diesem Zeitpunkt ungefähr 7,3°C pro Minute.</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die fehlenden Tabellenwerte sind $f(20)\approx 77{,}5$ und $f(40)\approx 37{,}9$.
Zeichnung siehe Lösungsteil a)
$f(t)=25 \Rightarrow 23+200\cdot e^{-0{,}065\cdot t}=25 \Rightarrow t\approx 70{,}8$.
Die Temperatur der Modellierung g ist nach ungefähr 70,8 Minuten auf 25°C gesunken.
Der Messwerte nach 60 Minuten und nach 80 Minuten sind niedriger als die entsprechenden Funktionswerte der Modellierung f. Die reale Temperatur wird daher nach 70,8 Minuten ebenfalls niedriger sein. Die 25°C werden also vermutlich etwas früher erreicht.
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=23$. Die Temperatur nähert sich auf Dauer 23°C an.</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Zweite Ableitung:
$h''(t)=(0{,}2\cdot t-4)\cdot e^{-0{,}1\cdot t}$
Wendepunkt:
Notwendige Bedingung:
$h''(t)=0 \Rightarrow (0{,}2\cdot t-4)\cdot e^{-0{,}1\cdot t}=0 \Rightarrow 0{,}2\cdot t-4=0 \Rightarrow t=20$
y-Wert: $h(20)=23+\frac{400}{e^2}$.
Der Wendepunkt von h liegt bei $W(20|77{,}1)$.
Am Wendepunkt ist die momentane Temperaturabnahme am größten.</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Temperatur steigt in den ersten 4 Minuten.
Durch Abschätzen des Inhalts der Fläche, die der abgebildete Graph für den betrachteten Zeitraum mit der Zeitachse einschließt, ergibt sich, dass die Temperatur in den ersten vier Minuten um etwa 12° steigt.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>8</td><td>12</td><td>5</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


0,4 ist der Anteil der Welpen, die das erste Lebensjahr überleben.

28% der Tiere überleben die ersten beiden Lebensjahre und werden zu Rudelführerinnen, denn $0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$. Damit liegt die Sterblichkeit in den ersten beiden Lebensjahren bei 72%.

Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70% der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80% der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt: $0{,}7 \cdot J_0 + 0{,}8 \cdot 39 = 55 \Leftrightarrow J_0 = 34$
</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Im Modell aus Aufgabe a) liegt die Sterblichkeit der Welpen in den ersten zwei Lebensjahren bei 72%. Im Modell aus Aufgabe b) ist diese mit 1-0,24=76% größer.

$$\overrightarrow{v_8} = M * \overrightarrow{v_6} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_4} = M^{-1} * \overrightarrow{v_6} \approx \begin{pmatrix} 313 \\ 92 \\ 87 \end{pmatrix}$$

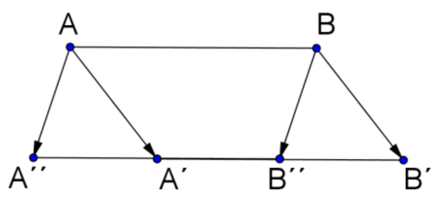
Es gilt sowohl: $\overrightarrow{v_{12}} = M^3 * \overrightarrow{v_6} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}$

als auch $\overrightarrow{v_{12}} \approx 1{,}38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}$.

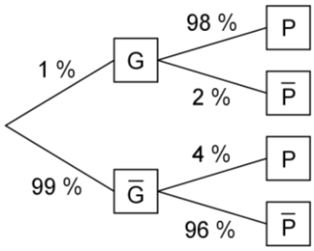
Der Wert $G = 3395 \cdot 1{,}38^7 \approx 32359$ gibt die Anzahl der Tiere an, aus denen die Gesamtpopulation etwa 17 Jahre nach Beobachtungsbeginn besteht.

Das Modell ist zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population nicht geeignet: Da die Wölfe in einem in einem großen, abgeschlossenen Gebiet leben, ist es nicht möglich, dass die Population langfristig exponentiell über alle Grenzen wächst. Zudem ist davon auszugehen, dass sich die Umweltbedingungen verändern und damit das Modell im Abstand weniger Jahre angepasst werden muss.
</td><td>3</td><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>7</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Eine mögliche Geradengleichung ist: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{AB} \quad m \in \mathbb{R}$, also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Da die x_3-Koordinate des Richtungsvektors Null ist, verläuft die Gerade g durch die Punkte A und B parallel zur x_1x_2-Ebene. (andere Begründungen möglich) $\overrightarrow{BA} * \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, also ist dort ein rechter Winkel. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ also $D(-6 \mid 2 \mid 5)$ Eine mögliche Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC}$; $m,n \in \mathbb{R}$, also $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	6	4	
b)	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $M(-2 \mid 4 \mid 3)$ Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi = \frac{\vec{v} * \vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi \approx 32{,}3°$ Der Winkel liegt in dem gewünschten Bereich.	1	6	
c)	Aus $\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $r = -0{,}2$ und $B'(1{,}4 \mid 6{,}2 \mid 0)$ Wegen $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \left\lVert \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rVert = \sqrt{56} \approx 7{,}48$ [m] und $\lvert\overrightarrow{B'C'}\rvert = \left\lVert \begin{pmatrix} -8{,}4 \\ 2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rVert = \sqrt{78{,}4} \approx 8{,}85$ [m] sind die Schattenstrecken nicht gleich lang. Da die Strecke $\overline{AB}$ parallel zum Boden ist und auch die Sonnenstrahlen in der Modellierung parallel verlaufen, entsteht unabhängig vom Einfallswinkel der Sonne ein Parallelogramm, sodass die Strecke $\overline{A'B'}$ gleich lang sein muss wie $\overline{AB}$.  Andere Begründungen sind möglich.		2	6
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**7**	**12**	**6**

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
a)	Baumdiagramm: G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“ P: „Das Testergebnis ist positiv.“ $P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}98\%$ $P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 95{,}06\%$ P (Glutenunverträglichkeit liegt vor | Testergebnis positiv) = $\frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{1-0{,}9506} \approx 19{,}84\%$  	6	3	
b)	Es gibt nur zwei Versuchsausgänge: Die Person hat eine Glutenunvertäglichkeit oder nicht. Dadurch, dass die Bevölkerung Deutschlands groß ist und die Stichprobe klein, kann man näherungsweise davon ausgehen, dass sich die Wahrscheinlichkeit p = 0,01 nicht ändert. $E(X) = 0{,}01 \cdot 400 = 4$ $P(C) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}99^{400} + 400 \cdot 0{,}99^{399} \cdot 0{,}01 \approx 9{,}05\%$ $P(D) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}99^{400} \approx 98{,}20\%$ $P(Y > 3)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man mehr als drei Personen befragen muss, bevor man eine mit Glutenunverträglichkeit findet. $P(Y > 3) = 0{,}99^3 \approx 97{,}03\%$ (alternativ: $P(Y > 3) = 1 - P(Y \le 3) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) - P(Y=3)$ $= 1 - 0{,}01 - 0{,}99 \cdot 0{,}01 - 0{,}99^2 \cdot 0{,}01 \approx 97{,}03\%$)	1	6	2
c)	Folgende Fehlentscheidungen können auftreten: 1. Obwohl höchstens 10% der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. 2. Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. Die Wahrscheinlichkeit der 1. Fehlentscheidung kann berechnet werden. Ist Z die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen mit der Verteilung B(100; 0,1; k) und k die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, so gilt: $P(Z \le 15) \approx 0{,}9601$. Die Wahrscheinlichkeit für die erste Fehlentscheidung beträgt ca. 4%. Für den Fall, dass in Wirklichkeit 20% der Teststreifen unbrauchbar sind, ist $P(Z \le 15) \approx 0{,}1285$ immerhin noch 12,85%.		2	5
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**11**	**7**

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2017

Grundkurs Mathematik

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

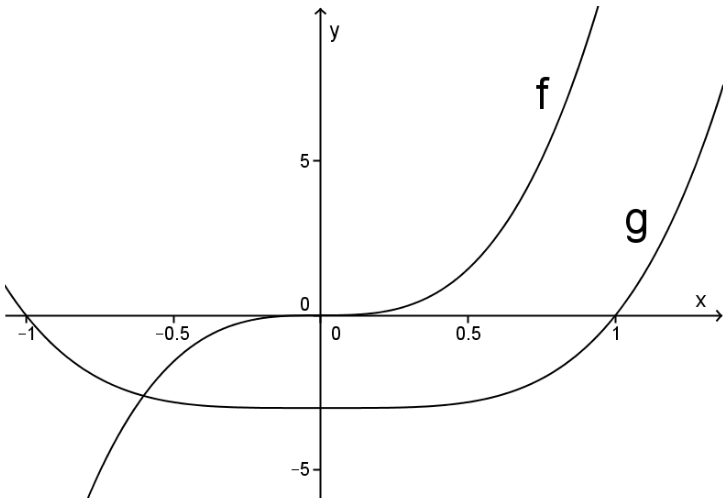
- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion sowie den Graphen ihrer Ableitungsfunktion.



a) Geben Sie an, welcher der beiden Graphen die Ableitungsfunktion darstellt und begründen Sie Ihre Angabe.

(2 Punkte)

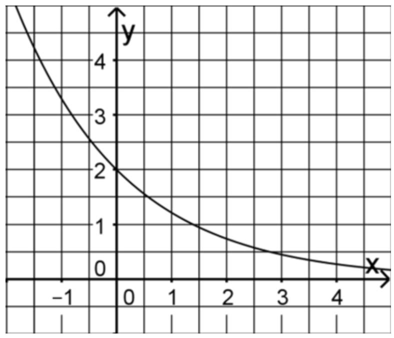
b) Betrachtet wird nun die Funktion f mit $f(x) = 12x^3$, wobei $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden x = 0 und x = k ein Flächenstück ein, wobei $k \in \mathbb{R}$ und $0 \le x \le k$. Bestimmen Sie einen Wert von k so, dass die Größe dieser Fläche 3 beträgt.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$$



Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.

(2 Punkte)

b) Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse sowie einer zur y-Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt ungefähr 1,5 beträgt.

Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Für ein zweistufiges Zufallsexperiment werden eine Münze und zwei Würfel verwendet. Beide Würfel sind auf allen sechs Seiten mit jeweils einer Zahl beschriftet, Würfel A mit 1, 2, 3, 4 ,5 und 6, Würfel B mit 1, 1, 2, 2, 3 und 3.

Zunächst wird die Münze geworfen. Zeigt die Münze „Kopf", so wird anschließend Würfel A einmal geworfen, zeigt sie „Zahl", so wird Würfel B einmal geworfen. Die geworfene Zahl wird notiert.

a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewürfelte Zahl gerade ist.

(2 Punkte)

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$ und $B(1|2|-1)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und $C(1|1|4)$ Eckpunkte eines Dreiecks sind, also nicht auf einer Geraden liegen.

(3 Punkte)

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Hierbei hat D die Koordinaten $D(d|1|4)$ mit einer reellen Zahl d. Ermitteln Sie den Wert von d.

(2 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Entscheiden Sie für jeden der Terme $A + B$ und $A * B$, ob er definiert ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so,

dass $B * C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

(3 Punkte)

Schriftliche Abiturprüfung 2017 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 3. Mai 2017, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 165 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis GTR

Gläser

Es werden die mittigen Längsschnitte von verschiedenen Gläsern ohne die Füße und Stiele der Gläser betrachtet.[1] Eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Materialstärke der Gläser wird vernachlässigt. Die Glasformen sind so gewählt, dass sich die Längsschnitte durch ganzrationale Funktionen beschreiben lassen. Die Abbildung 1 zeigt fünf zugehörige Graphen.

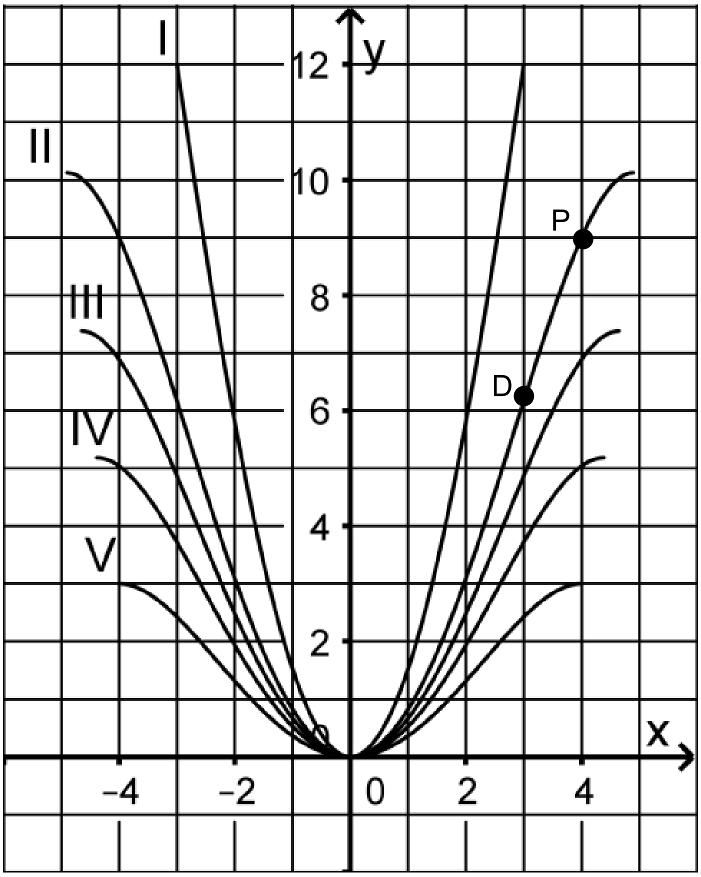


Abbildung 1

Im Folgenden werden ein Likörglas, ein Cocktailglas und ein Sektglas näher betrachtet.

Das Likörglas ist am oberen Rand genau 8 cm breit und erreicht hier zudem seine maximale Höhe von 3 cm. Der Längsschnitt des Likörglases verläuft am oberen Rand waagerecht.

a) **Geben** Sie an, welcher Graph den Längsschnitt des Likörglases beschreibt.

Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Angaben eine Funktion g vierten Grades mit $g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2$, die den Längsschnitt modelliert.

Arbeiten Sie im Folgenden bitte weiter mit der Funktion g mit

$$g(x) = -\frac{3}{256} \cdot x^4 + \frac{3}{8} \cdot x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von g.

Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten des Längsschnitts in der Nähe eines der Wendepunkte.

(10 Punkte)

[1] Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig. Im Koordinatensystem stellt die y-Achse die Rotationsachse für jedes Glas dar.

Der Graph II beschreibt den Längsschnitt des Cocktailglases. Für die zugehörige Funktion f gilt:

$$f(x) = -\frac{9}{512} \cdot x^4 + \frac{27}{32} \cdot x^2 \text{, wobei } x \in \mathbb{R} .$$

b) Um das Glas herum ist eine kreisrunde Dekorlinie eingeschliffen.

Bei x=3 ist in Abbildung 1 ein Punkt D dieser Dekorlinie auf dem Längsschnitt des Cocktailglases eingezeichnet. **Bestimmen** Sie rechnerisch, in welcher Höhe die Dekorlinie verläuft.

Berechnen Sie die Länge der kreisrunden Dekorlinie.

Im Glas steht ein Strohhalm,[2] der es im oberen Bereich tangential berührt. Im Modell entspricht dieser Berührpunkt dem Punkt $P(4\,|\,9)$.

Zeigen Sie, dass die Gerade t mit $t(x) = 2{,}25 \cdot x$ die Lage des Strohhalms beschreibt.

Zeichnen Sie die zugehörige Tangente in Abbildung 1 ein.

Ermitteln Sie die Länge des Strohhalmabschnitts, der zwischen seinem unteren Punkt und dem Berührpunkt liegt.

(10 Punkte)

Das Sektglas ist 12 cm hoch und hat am oberen Rand einen Durchmesser von 6 cm. Wird das Sektglas mit Flüssigkeit gefüllt, gibt die Funktion r mit

$$r(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h} \text{, wobei } h \in \mathbb{R}_0^+$$

zu jeder Füllhöhe h in cm näherungsweise den Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in cm an.

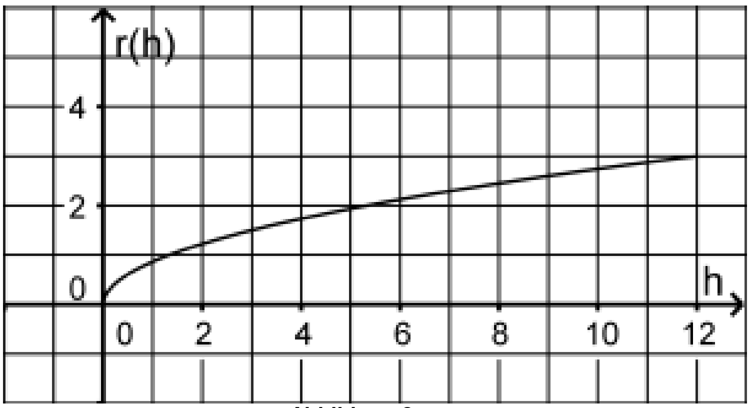


Abbildung 2

c) Das Sektglas wird bis zu einer Höhe von 8 cm mit Flüssigkeit gefüllt.

Veranschaulichen Sie den Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in Abbildung 2.

Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion r das Volumen der eingefüllten Flüssigkeit.

(5 Punkte)

[2] Der Durchmesser des Strohhalms wird im Folgenden vernachlässigt.

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Temperatur von Flüssigkeiten

In einem Produktionsprozess wird eine Flüssigkeit erhitzt und anschließend wieder abgekühlt. Dabei wurden Messungen durchgeführt. Die Messergebnisse sind als Kreuze im Koordinatensystem in den Abbildungen 2 und 3 im Material eingetragen.

Der Verlauf der Temperatur der Flüssigkeit wird in dieser Aufgabe durch verschiedene Funktionen modelliert. Die Funktionswerte beschreiben jeweils die Temperatur im Modell (in Grad Celsius) in Abhängigkeit von der Zeit (in Minuten). Runden Sie die berechneten Temperaturwerte auf eine Stelle hinter dem Komma.

a) **Modellierung des Erhitzungsvorgangs mit Hilfe einer linearen Funktion g**

Zu Beginn wird eine Temperatur von 23°C gemessen und nach 10 Minuten 96°C.

Zeichnen Sie zur Verdeutlichung des Erhitzungsvorgangs durch die beiden zugehörigen Kreuze in Abbildung 2 eine Gerade.

Bestimmen Sie eine lineare Funktion g, die diesen Erhitzungsvorgang modelliert.

Berechnen Sie $g(5)$ und $g'(5)$ und **interpretieren** Sie beide Werte im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

b) **Modellierung des Abkühlungsvorgangs durch eine Exponentialfunktion f**

Der Abkühlungsvorgang ab der 20. Minute wird in diesem Aufgabenteil näherungsweise durch die Funktion f mit

$$f(t) = 23 + 200 \cdot e^{-0{,}065 \cdot t} \quad \text{für } t \geq 20$$

beschrieben. Die folgende Tabelle enthält die zugehörigen Messwerte und bereits zwei Funktionswerte

Zeit in Minuten	20	40	60	80
Messwerte in °C	78	38	26	23
Funktionswerte f(t)			27,0	24,1

Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte in der Tabelle für t=20 und t=40 und **zeichnen** Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe der Tabellenwerte in das Koordinatensystem in Abbildung 2 im Material. Achten Sie dabei auf den Unterschied zwischen Mess- und Funktionswerten.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Rechnung nach welcher Zeit die Temperatur, die durch die Funktion f modelliert wird, 25°C beträgt.

Der tatsächliche Zeitpunkt, zu dem die Temperatur der Flüssigkeit 25°C beträgt, stimmt nicht mit dem berechneten Zeitpunkt überein. **Entscheiden** Sie begründet mit Hilfe der Mess- und Funktionswerte nach 60 und nach 80 Minuten, ob die Flüssigkeit vermutlich früher oder später als dies die Funktion f angibt, die Temperatur von 25°C hatte.

Geben Sie den Grenzwert der Funktion f für $t \to \infty$ **an** und **interpretieren** Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(11 Punkte)

c) **Modellierung des Erhitzungs- und des Abkühlungsvorgangs für diese Temperaturmessung durch eine einzige Funktion h**

Die Funktion h mit

$$h(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}, \ t \geq 0$$

modelliert sowohl den Erhitzungs- als auch den Abkühlungsprozess für die oben angegebenen Messdaten. Die Messdaten und der Graph der Funktion h sind in der Abbildung 3 eingezeichnet.

Die Funktionsgleichung der ersten Ableitung der Funktion h lautet

$$h'(t) = (-2 \cdot t + 20) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}.$$

Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von h und **interpretieren** Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang. Die hinreichende Bedingung für den Wendepunkt braucht nicht überprüft zu werden.

(6 Punkte)

d) **Änderungsrate eines Temperaturverlaufs einer Flüssigkeit in einem anderen Produktionsprozess**

Zu einem Temperaturverlauf einer Flüssigkeit stellt der Graph in Abbildung 1 die Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit dar:

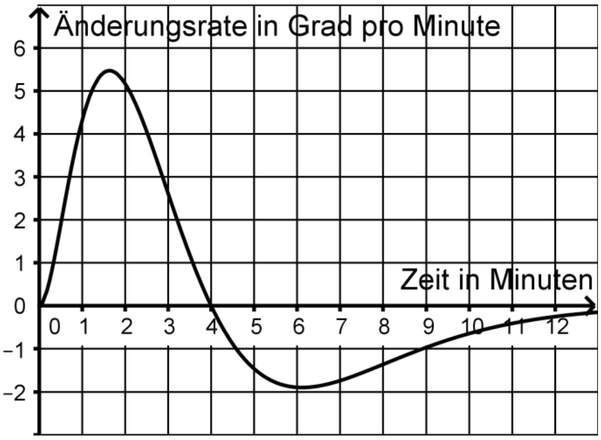


Abbildung 1

Geben Sie **an**, ob die Temperatur in den ersten vier Minuten steigt oder fällt.

Bestimmen Sie einen Näherungswert um wieviel Grad die Temperatur in den ersten 4 Minuten zu- beziehungsweise abgenommen hat.

(3 Punkte)

Material:

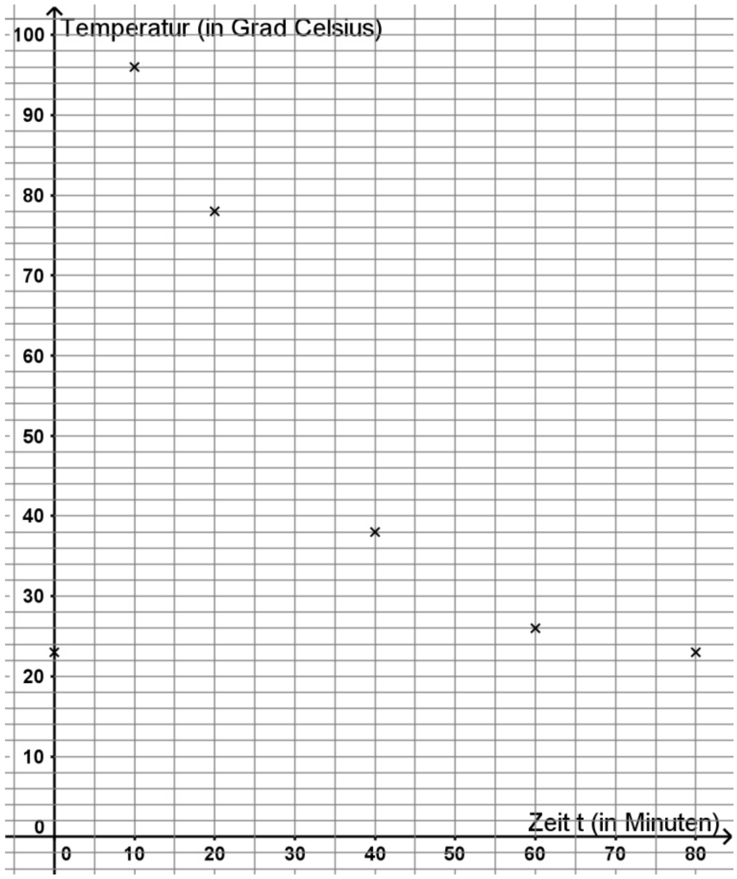


Abbildung 2

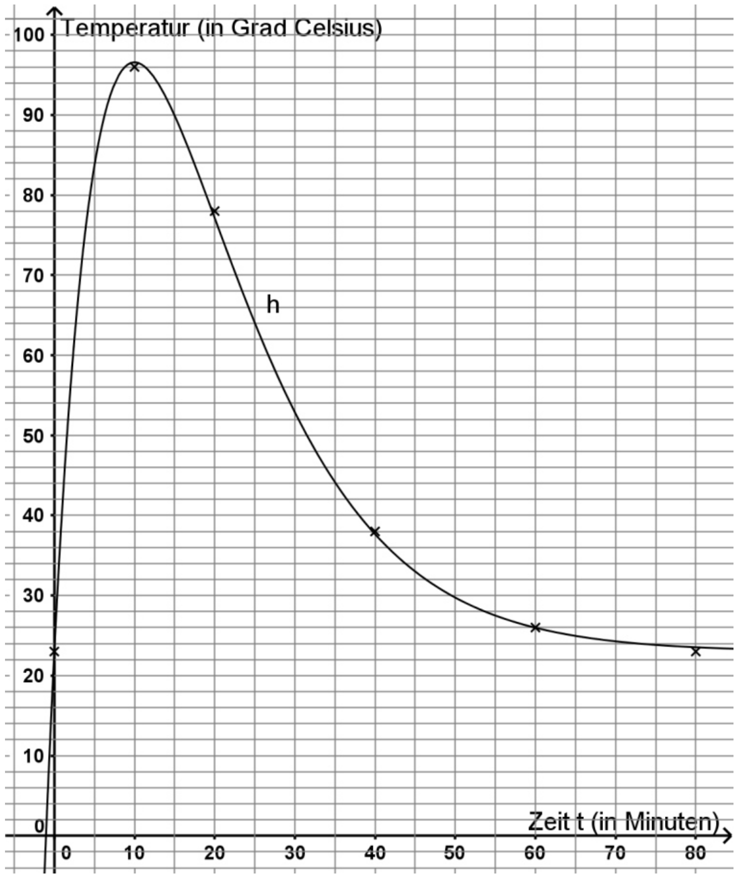


Abbildung 3

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Lineare Algebra

GTR

Wölfe **[Logo Wolf]**

Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, welches das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Danach sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen.

Im Folgenden werden stets nur weibliche Wolfspopulationen betrachtet.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet.

Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\overrightarrow{v_0}$ dargestellt.

Bitte rechnen Sie im Folgenden mit zwei Nachkommastellen und geben Sie stets ganze Tieranzahlen an.

a) Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = L * \overrightarrow{v_n}$ beschreiben.

Stellen Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Werts 0,4 in L im Sachzusammenhang.

Zeigen Sie mit einer Rechnung, dass innerhalb der ersten zwei Lebensjahre 72% der Wölfe als Welpen oder Jungtiere sterben.

Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55.

Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn.

(9 Punkte)

b) Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population. Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+2}} = M * \overrightarrow{v_n}$ beschrieben werden.

Vergleichen Sie den Anteil der Wölfe, die in den ersten beiden Lebensjahren als Welpen oder Jungtiere sterben mit der entsprechenden Sterblichkeit von 72% im Modell aus Aufgabenteil a).

Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\overrightarrow{v_6} = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt, d. h. die Population besteht zu diesem Zeitpunkt aus insgesamt 938 Tieren.

Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre und vier Jahre nach Beobachtungsbeginn.

Der Vektor $\overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ stellt die Zusammensetzung der Population zehn Jahre nach Beobachtungsbeginn dar. Die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen wächst in diesem Modell von nun an von einem Jahr zum übernächsten um einen festen Faktor.

Zeigen Sie rechnerisch mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{v_{10}}$ und $\overrightarrow{v_{12}}$, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa $(1{,}38)^2$ beträgt.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Faktors, aus wie vielen Tieren die Population 17 Jahre nach Beobachtungsbeginn besteht.

Beurteilen Sie das verwendete Modell hinsichtlich seiner Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population.

(16 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie GTR

Solarmodul

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Dreieck ABC mit $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$ und $C(-4|8|5)$ gegeben.

a) **Geben** Sie eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B **an**.

Begründen Sie, dass diese Gerade g parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC im Punkt B einen rechten Winkel hat.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, sodass ABCD ein Rechteck ist.

Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. **Ermitteln** Sie eine Gleichung von E in Parameterform.

(10 Punkte)

Das Rechteck ABCD soll die Fläche eines Solarmoduls darstellen. Diese wird im Folgenden kurz „Modulfläche" genannt. Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2- Ebene den horizontalen Boden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

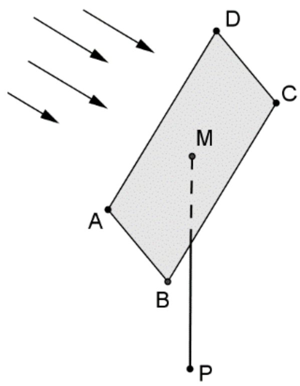


Abb.1

b) Die Modulfläche ist an einem Metallrohr befestigt, das senkrecht auf dem Boden steht. Dieses wird mit der Strecke $\overline{PM}$ modelliert, wobei der Punkt P die Befestigung am Boden darstellt und der Punkt M die Befestigung an der Modulfläche (s. Abb.1).

Zeigen Sie, dass der Punkt $M(-2|4|3)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Modulfläche. Für einen möglichst großen Energieertrag sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber dem horizontalen Boden zwischen 30° und 36° liegen. **Untersuchen** Sie, ob die Größe des Neigungswinkels der Modulfläche in diesem Bereich liegt.

(7 Punkte)

c) Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das in der Abbildung durch parallele Pfeile dargestellt wird, entlang des Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht auf die Modulfläche.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes B' von B, der sich auf dem Boden befindet.

Der Schattenpunkt von C ist $C'(-7|9|0)$. **Zeigen** Sie, dass die Schattenstrecke $\overline{B'C'}$ nicht die gleiche Länge hat wie die Strecke $\overline{BC}$.

Begründen Sie ohne weitere Rechnungen, mit Hilfe einer geeignet beschrifteten Skizze, dass die Schattenstrecke $\overline{A'B'}$ gleich lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$ unabhängig davon, in welchem Winkel das parallele Sonnenlicht einfällt. (Zur Erinnerung: Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene einen Meter über dem Boden.)

(8 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Stochastik GTR

Glutenunverträglichkeit

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man das Testergebnis als positiv.

Runden Sie im Folgenden alle Prozentwerte auf zwei Nachkommastellen.

a) Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.

Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv."
B: „Das Testergebnis einer Person ist negativ."

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.

(9 Punkte)

b) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 400 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

Erläutern Sie, warum man die Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten von X als mehrstufigen Bernoulli-Versuch auffassen kann.

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
C: weniger als zwei der ausgewählten Personen eine Glutenunverträglichkeit haben.
D: mindestens eine Person eine Glutenunverträglichkeit hat.

Die Personen werden nacheinander zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bis eine Person mit Glutenunverträglichkeit gefunden wird. **Interpretieren** Sie die Bedeutung von $P(Y > 3)$ im Sachzusammenhang und **berechnen** Sie das Ergebnis.

(9 Punkte)

Der Test auf Glutenunverträglichkeit wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt. Einige von diesen Teststreifen sind unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind. In einer regelmäßigen Qualitätskontrolle wird getestet, ob der Wert von 10% unbrauchbarer Teststreifen überschritten wird. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

c) **Erläutern** Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.

Die Wahrscheinlichkeit für eine dieser Fehlentscheidungen kann berechnet werden. **Ermitteln** Sie diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilungstabelle im Anhang.

Jemand vermutet, dass in Wirklichkeit 20% der Teststreifen unbrauchbar sind. **Bestimmen** Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man aber in einer Qualitätskontrolle dennoch weniger als 16 unbrauchbare Teststreifen findet. Sie können dazu wieder die Tabellen im Anhang verwenden.

(7 Punkte)

Anhang kumulierte Binomialverteilungen

n = 100 p = 0,1

k	$P(X \leq k)$
0	0,0000
1	0,0003
2	0,0019
3	0,0078
4	0,0237
5	0,0576
6	0,1172
7	0,2061
8	0,3209
9	0,4513
10	0,5832
11	0,7030
12	0,8018
13	0,8761
14	0,9274
15	0,9601
16	0,9794
17	0,9900
18	0,9954
19	0,9980
20	0,9992
21	0,9997
22	0,9999
23	1,0000

n = 100 p = 0,15

k	$P(X \leq k)$
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0001
4	0,0004
5	0,0016
6	0,0047
7	0,0122
8	0,0275
9	0,0551
10	0,0994
11	0,1635
12	0,2473
13	0,3474
14	0,4572
15	0,5683
16	0,6725
17	0,7633
18	0,8372
19	0,8935
20	0,9337
21	0,9607
22	0,9779
23	0,9881
24	0,9939
25	0,9970
26	0,9986
27	0,9994
28	0,9997
29	0,9999
30	1,0000

n = 100 p = 0,2

k	$P(X \leq k)$
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0000
4	0,0000
5	0,0000
6	0,0001
7	0,0003
8	0,0009
9	0,0023
10	0,0057
11	0,0126
12	0,0253
13	0,0469
14	0,0804
15	0,1285
16	0,1923
17	0,2712
18	0,3621
19	0,4602
20	0,5595
21	0,6540
22	0,7389
23	0,8109
24	0,8686
25	0,9125
26	0,9442
27	0,9658
28	0,9800
29	0,9888
30	0,9939
31	0,9969
32	0,9984
33	0,9993
34	0,9997
35	0,9999
36	0,9999
37	1,0000