

## Schriftliche Abiturprüfung 2015 im dritten Prüfungsfach

### Grundkurs Mathematik (TR)

Mittwoch, 22. April, 9.00 Uhr

---

#### Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

#### Diese Unterlagen enthalten ...

- Allgemeines,
  - die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
  - keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
  - einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
  - einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.
- 

#### Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Bildung und Wissenschaft über die **Hotline (0421 ...)** von 7.00 bis 9.30. Die von der Senatorin für Bildung und Wissenschaft vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

## Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

<b>Bewertungs- einheiten</b>	<b>Punkte</b>
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 59,5	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

**Aufgabe 1 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung			
		I	II	III	
a)	<p>Es ist <math>b'(x) = -0,09x^2 + 0,48x</math> und <math>b''(x) = -0,18x + 0,48</math>.</p> <p>Mit <math>b'(x) = 0</math> erhält man <math>x_1 = 0</math> oder <math>x_2 = \frac{16}{3}</math>. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums kann mit <math>b'\left(\frac{16}{3}\right) = -0,48 &lt; 0</math> oder argumentativ mit Hilfe des Schaubildes des Graphen erbracht werden. Aus <math>b'\left(\frac{16}{3}\right) = 0</math> und <math>b\left(\frac{16}{3}\right) = -\frac{163}{225}</math> folgt dann: <math>N_b(5, \bar{3}   -0,72\bar{4})</math> ist der nördlichste Punkt.</p> <p><math>f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d</math>, <math>f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c</math></p> <p>Es gilt <math>f(0) = -4</math>, <math>f(4) = -2,72</math>, <math>f'(0) = 0</math> und <math>f'(4) = 0</math>.</p> <p>Durch Lösen des LGS <math display="block">\begin{bmatrix} d = -4 \\ 64a + 16b + 4c + d = -2,72 \\ 48a + 8b + c = 0 \\ c = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = -0,04 \\ b = 0,24 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{bmatrix}</math></p> <p>erhält man <math>f(x) = -0,04x^3 + 0,24x^2 - 4</math>.</p>	6	8		
b)	<p>Veranschaulichung von <math>G</math> siehe Schraffur.</p> $G = 3 \cdot 5,13 - \int_{-3}^0 a(x) dx$ $G = 3 \cdot 5,13 - \left[ 0,002x^5 - 0,02x^4 + 0,08x^3 \right]_{-3}^0$ $= 11,124$ <p>Die Größe des Vogelschutzgebietes beträgt <math>11,124 \text{ km}^2</math>.</p>		2	3	
c)	<p><math>a'(x) = 0,04x^3 - 0,24x^2 + 0,48x</math>. Da <math>a'(2) = 0,32</math> ist, beträgt die Steigung <math>m_t</math> der Tangente <math>t</math> im Punkt <math>F</math>: <math>m_t = 0,32</math>. Einsetzen von <math>m_t</math> und den Koordinaten von <math>F</math> in die Geradengleichung <math>t(x) = m_t \cdot x + b</math> ergibt die Gleichung <math>0,48 = 0,32 \cdot 2 + b</math>. Daraus folgt <math>b = -0,16</math> und damit ist <math>t(x) = 0,32 \cdot x - 0,16</math>.</p> <p>Der Winkel zur Horizontalen beträgt: <math>\alpha = \tan^{-1}(0,32) \approx 17,7^\circ</math>.</p> <p>Skizze der geplanten Fährstrecke s.o.</p> <p>Da zwischen <math>h</math> und <math>t</math> ein rechter Winkel sein soll, benötigt man diejenige Steigung, die einem Steigungswinkel von <math>-72,26^\circ</math> entspricht, also <math>m = \tan(-72,26) \approx -3,125</math>.</p> <p>Alternative Lösungswege sind selbstverständlich möglich.</p>			2 2 2	
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>	

**Aufgabe 2 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

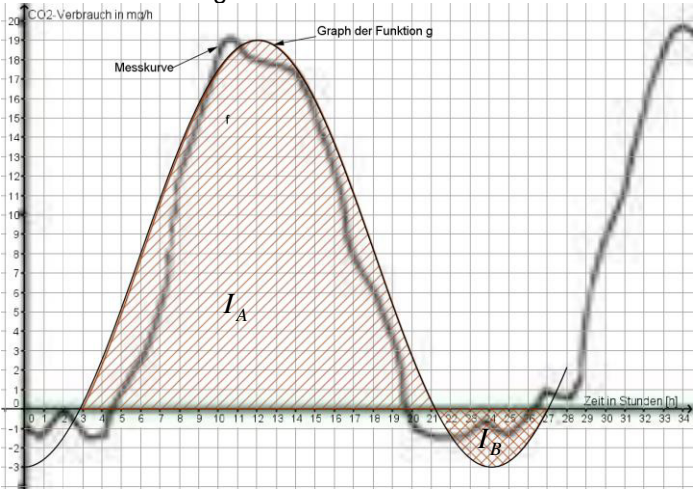
Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
<p>a)</p> <p>Liegt eine konstante Wachstumsrate vor, wird ein exponentieller Prozess beschrieben, also <math>f(t) = a \cdot e^{kt}</math>.</p> <p><math>f(0) = 7,14 \Rightarrow a = 7,14</math></p> <p>Für den Wachstumsfaktor <math>b</math> gilt: <math>b = 1 + p\% = 1,012</math> Damit ergibt sich insgesamt <math>e^{\ln 1,012} \approx e^{0,0119} \Rightarrow f(t) = 7,14e^{0,0119t}</math></p> <p>Die Aussage der DSW ist zutreffend, denn <math>f(37) \approx 11,09 \approx 11</math>, wobei <math>t = 37</math> dem Anfang des Jahres 2050 entspricht.</p> <p><math>f(t) = 8 \Rightarrow t \approx 9,6</math></p> <p><math>t = 9,6</math>, also wird nach dieser Modellierung etwa Mitte 2022 die 8 Milliarden-Grenze überschritten.</p> <p>Funktionswerte für die Skizze (siehe rechts):</p> <p><math>f(7) \approx 7,76</math>; <math>f(17) \approx 8,74</math>; <math>f(27) \approx 9,85</math>; <math>f(37) \approx 11,09</math></p> <p><math>f'(t) \approx 0,085 \cdot e^{0,0119t}</math> <math>f'(5) \approx 0,09</math></p> <p>Der Wert gibt die momentane Zunahme der Weltbevölkerung in Mrd./Jahr Anfang 2018 an, es sind zu diesem Zeitpunkt 0,09 Mrd. Menschen/Jahr.</p>		5	6	
<p>b)</p> <p>Gerade <math>h(t) = mt + b</math>; <math>m = 0,09 \Rightarrow h(t) = 0,09t + b</math></p> <p>Mit <math>h(5) = 7,58</math> folgt <math>b \approx 7,13</math>. Also wird die hohe Variante durch <math>h(t) = 0,09t + 7,13</math> beschrieben.</p> <p>Da <math>h(37) \approx 10,46</math>, entspricht der berechnete Wert etwa dem Wert für 2050 bei der „Variante zu Aufgabenteil b)“ in der Grafik.</p> <p>Prozentuale Zunahme 2033: <math>\frac{0,09}{0,09 \cdot 20 + 7,13} \approx 1,0\%</math></p> <p>Der absolute Zuwachs <math>m = 0,09</math> Mrd. Menschen pro Jahr bleibt gleich, während die absolute Anzahl <math>n</math> der Menschen auf der Welt steigt. Also wird der prozentuale Zuwachs <math>\frac{0,09}{n_j}</math> mit zunehmender Jahreszahl <math>J</math> kleiner (<math>n_j</math>: Anzahl der Menschen Anfang des Jahres <math>J</math>).</p>		3	3	1
<p>c)</p> <p><math>m(0) = 7,14</math>. Also passt das Modell zum Ausgangswert für 2013.</p> <p><math>m'(t) \approx 0,099e^{-0,0256t}</math>; <math>m'(0) \approx 0,10</math>, also ist die momentane Zuwachsrate ca. 0,1 Mrd. Menschen pro Jahr.</p> <p><math>\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 11</math>, da <math>e^{-0,0256t} \rightarrow 0</math> für <math>t \rightarrow \infty</math>.</p> <p>Also nähert sich die Weltbevölkerung auf lange Sicht dem Wert 11 Milliarden Menschen.</p> <p><math>I_2 = \int_{27}^{28} m'(t) dt \approx 0,05</math></p>				

---

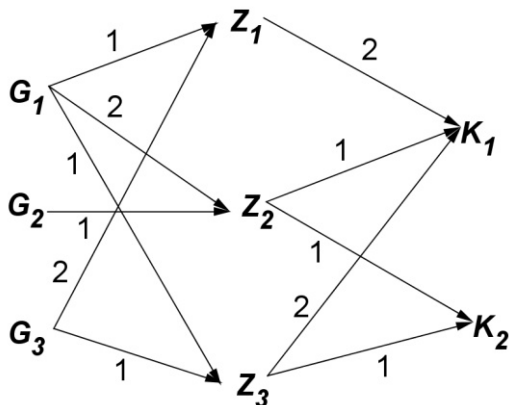
Die beiden Werte beschreiben den Zuwachs der Weltbevölkerung von Anfang 2020 bis Anfang 2021 bzw. von Anfang 2040 bis Anfang 2041. Der zweite Wert ist geringer, weil die Weltbevölkerung in diesem Modell zwar wächst, aber sich einem Wert von 11 Milliarden Menschen asymptotisch annähert und damit auch der Anstieg der Weltbevölkerung immer geringer wird.	2	4	1
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>

**Aufgabe 3 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
a)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Amplitude der Funktion <math>f</math> ist <math>a = 10</math></li> <li>Die Periodenlänge ist <math>P = 2\pi : \left(\frac{\pi}{12}\right) = 24</math>.</li> <li>Bestimmung der Wendepunkte zum Beispiel mit Hilfe der Parameter der Sinusfunktion <math>f</math> : Durch die Phasenverschiebung <math>c = 6</math> befinden sich die gesuchten Wendepunkte an den Stellen <math>t_{W1} = c = 6</math> und <math>t_{W2} = P/2 + c = 18</math>. Die Konstante <math>d = 7</math> gibt die Ruhelage an; damit liegen die Funktionswerte der Wendepunkte bei <math>y = 7</math>. Also sind die gesuchten Wendepunkte <math>W_1(6   7)</math> und <math>W_2(18   7)</math>.</li> <li>Entsprechend liegt der Hochpunkt bei <math>t_H = P/4 + c = 12</math> und der zweite Tiefpunkt bei <math>t_{T2} = 3P/4 + c = 24</math>. Zum Zeitpunkt <math>t_{T1} = 0</math> befindet sich der erste Tiefpunkt. Der Funktionswert des Hochpunkts liegt bei <math>a + d = 17</math> und die der Tiefpunkte bei <math>d - a = -3</math>. Insgesamt ergeben sich folgende Punkte: <math>T_1(0   -3)</math>; <math>H(12   17)</math>; <math>T_2(24   -3)</math></li> <li>Skizze:</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; height: 200px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>	4	6	
b)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Unterschiede: Die Amplituden und die Ruhelagen unterscheiden sich. Bei Funktion <math>f</math> ist die Amplitude 11 und die Ruhelage 7 und bei Funktion <math>g</math> ist beides um eins größer.</li> <li>Mögliches Argument: Das Maximum ist der Messung beträgt ungefähr 19. Bei trigonometrischen Funktionen ergibt sich das Maximum durch die Summe von Amplitude und Ruhelage. Bei <math>g</math> stimmt dieser Wert mit <math>8 + 11 = 19</math> eher mit der Messung überein als bei <math>f</math> mit <math>7 + 10 = 17</math>.</li> </ul>	1	1	

c)	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>g(7) \approx 10,85</math>.</li> </ul> <p>Die Funktionsgleichung der Ableitung lautet: <math>g'(t) = \frac{11\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right)</math>.</p> <p><math>g'(7) \approx 2,78</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Siehe Skizze der Tangente an die Messkurve in der Lösung zu Aufgabenteil a).</li> <li>Der <math>y</math>-Wert der Messkurve an der Stelle <math>t = 7</math> ist ungefähr 5.</li> <li>Die Steigung beträgt dort ungefähr 3,5, wie zum Beispiel dem Steigungsdreieck mit Steigung <math>m \approx 7/2 = 3,5</math> zu entnehmen ist (siehe Skizze in der Lösung zu Aufgabenteil a)).</li> <li>Die Funktionswerte differieren sehr (um mehr als <math>5 \text{ mg/h}</math>), die Steigungswerte stimmen mit 2,78 und 3,5 schon eher überein. Das heißt, der <math>\text{CO}_2</math>-Verbrauch wird an dieser Stelle durch die Modellierung nicht gut dargestellt, der Zuwachs des Verbrauchs jedoch schon etwas besser.</li> </ul>	3	4	1
d)	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>G(t) = -\frac{132}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right) + 8t</math> ist eine Stammfunktion von <math>g</math>.</li> <li>Berechnungen:  <math display="block">I_A = \int_{t_{2,9}}^{t_{21,1}} g(t) dt = [G(t)]_{2,9}^{21,1} = G(21,1) - G(2,9) \approx 203,45 \text{ und } I_A + I_B \approx 192.</math> </li> <li>Veranschaulichung siehe Skizze:</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>Der Wert <math>I_A + I_B \approx 192</math> ist der Bilanzwert eines Tages: wenn Aufnahme und Abgabe innerhalb 24 Stunden gegengerechnet werden, entnimmt die Tomatenpflanze in diesem Zeitraum 192 Milligramm <math>\text{CO}_2</math> der Luft.</li> </ul>	2	2	1
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>

**Aufgabe 4 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Verflechtungsdiagramm</p>  $C_{GK} = A_{GZ} * B_{ZK} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Es gilt z.B. <math>c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3</math>.</p> <p>Es gilt: <math>\begin{pmatrix} 6 &amp; 3 \\ 1 &amp; 1 \\ 6 &amp; 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix}</math>. Also sind für diese Bestellung 210 ME von <math>G_1</math>, 50 ME von <math>G_2</math> und 150 ME von <math>G_3</math> erforderlich.</p> <p>Es gilt: <math>(45 \quad 25 \quad 40) * \begin{pmatrix} 6 &amp; 3 \\ 1 &amp; 1 \\ 6 &amp; 1 \end{pmatrix} = (535 \quad 200)</math>. Die Kosten für die Produktion von einer ME Klebstoff <math>K_1</math> betragen 5,35 Euro und die von einer ME Klebstoff <math>K_2</math> betragen 2 Euro.</p>			
b)	<p>Mit dem Ansatz <math>A_{GZ} * \vec{z} = \vec{g}</math> gilt: <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 8 \\ 34 \end{pmatrix}</math>. Aus dieser Matrix-</p> <p>Vektorgleichung ergibt sich: <math>\begin{bmatrix} z_1 + 2z_2 + z_3 = 38 \\ z_2 = 8 \\ 2z_1 + z_3 = 34 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 = 12 \\ z_2 = 8 \\ z_3 = 10 \end{bmatrix}</math>.</p> <p>Es können 12 ME von Zwischenprodukt <math>Z_1</math>, 8 ME von <math>Z_2</math> und 10 ME von <math>Z_3</math> produziert werden.</p>			
		5	6	
		2	2	



c)	<p>Es gilt: <math>\begin{pmatrix} 6 &amp; 3 \\ 1 &amp; 1 \\ 6 &amp; 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ g_3 \end{pmatrix}</math>. Aus dieser Matrix-Vektorgleichung ergibt sich das</p> <p>LGS <math>\begin{bmatrix} 6k_1 + 3k_2 = 60 \\ k_1 + k_2 = 15 \\ 6k_1 + k_2 = g_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k_1 = 5 \\ k_2 = 10 \\ 6k_1 + k_2 = g_3 \end{bmatrix}</math>. Dieses LGS ist mit <math>k_1 = 5</math> und <math>k_2 = 10</math> mit <math>g_3 = 6 \cdot 3 + 10 = 40</math> eindeutig lösbar.</p> <p>Wenn 60 ME von <math>G_1</math> und 15 ME von <math>G_2</math> vorhanden sind, können mit 40 ME von <math>G_3</math> dann 5 ME von <math>K_1</math> und 10 ME von <math>K_2</math> produziert werden.</p>	2	2	1
d)	<p>Mit dem Ansatz: <math>(A_{GZ})^{-1} * A_{GZ} = E = \begin{pmatrix} -1 &amp; a &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; -4 &amp; b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>folgt z.B. <math>(-1) \cdot 2 + a \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a = 2</math> sowie <math>2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + b \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow b = -1</math>.</p> <p>Es gilt: <math>M * \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow M^{-1} * (M * \vec{x}) = M^{-1} * \vec{y} \Leftrightarrow (M^{-1} * M) * \vec{x} = M^{-1} * \vec{y} \Leftrightarrow E * \vec{x} = M^{-1} * \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = M^{-1} * \vec{y}</math>.</p>	1	3	1
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>

**Aufgabe 5**

**Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Zeichnungen:</p> <p>Das Viereck ist ein Parallelogramm weil die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel zueinander sind (Nachweis z.B. durch <math>\overline{AB} = \overline{IJ}</math> und <math>\overline{AI} = \overline{BJ}</math> oder Betrachtung der Beträge der jeweiligen Vektoren). Abgrenzung zum Rechteck: <math>\overline{AB} * \overline{AI} = 3 \neq 0</math>, es liegt also kein Rechteck vor.</p>	3	2	
b)	<p>Eine mögliche Geradengleichung:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Lage zwischen <math>g</math> und <math>h</math> (alternative Lösungswege sind möglich):</p> <p>Untersuchung der Richtungsvektoren liefert <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math>, also ist <math>g \parallel h</math>.</p> <p>Die Punktprobe <math>\begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}</math> hat keine Lösung, also ist <math>g \parallel h</math> und <math>g \neq h</math>.</p> <p>Zeichnung: siehe Aufgabenteil a.)              Abstandsbestimmung:  <math display="block">d =  \overline{PF}  = \sqrt{(0-5)^2 + (5,5-3,5)^2 + (4,2-1,5)^2} = \sqrt{32,29} \approx 5,68</math> <p>Beurteilung: Der berechnete Abstand ist die Länge zwischen dem Bewegungsmelder und etwas, was sich 1,5 m oberhalb der Straße bewegt, z.B. der Kopf einer kleinen Person oder die Schulter einer Person. Dadurch, dass die berechnete Länge kürzer als 6 m ist, reagiert der Bewegungsmelder beim Vorbeigehen und schaltet das Licht ein.</p> </p>	4	5	1

c)	<p>Nachweis z.B. über das Bilden der Skalarprodukte mit den Richtungsvektoren von <math>E_1</math>: <math>\vec{n}_1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 10 \cdot 0 = 0</math> und <math>\vec{n}_1 * \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 10 + 0 \cdot 2 + 10 \cdot (-3) = 0</math></p> <p>Weil <math>\vec{n}_1</math> zu beiden Richtungsvektoren von <math>E_1</math> orthogonal ist, ist er auch orthogonal (senkrecht) zur Ebene <math>E_1</math>.</p> <p>Bestimmung des Winkels:</p> $\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 10^2} \cdot \sqrt{1}} \approx 0,958, \text{ daraus folgt } \alpha \approx 16,7^\circ.$ <p>Interpretation: der Winkel zwischen <math>\vec{n}_1</math> und <math>\vec{n}</math> ist der Winkel zwischen der Einfahrt bzw. der Ebene <math>E_1</math> und der <math>x_1x_2</math>-Ebene, da <math>\vec{n}_1</math> Normalenvektor von <math>E_1</math> und <math>\vec{n}</math> der Normalenvektor zur <math>x_1x_2</math>-Ebene ist. Die Einfahrt hat also eine Steigung von etwa <math>16,7^\circ</math>.</p>	2	3	
d)	<p>Eine mögliche Lösung: Bei allen Eckpunkten des Garagentors ist die <math>x_1</math>-Koordinate null, d.h. alle diese Punkte liegen in der <math>x_2x_3</math>-Ebene. Da sowohl Stützvektor und beide Richtungsvektoren der Ebene <math>E_2</math> ebenfalls aus demselben Grund in der <math>x_2x_3</math>-Ebene liegen, sind die vier Eckpunkte und somit das Garagentor innerhalb der Ebene <math>E_2</math> (alternative Lösungen sind möglich und gleichwertig).</p> <p>Schnittpunkt von <math>k</math> mit <math>E_2</math>:</p> <p>Gleichsetzen von <math>k</math> mit <math>E_2</math> liefert <math>\begin{pmatrix} 12 \\ 3,7 \\ 6,04 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1,2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix}</math></p> <p>Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem</p> $\begin{cases} t \cdot (-12) + r \cdot 0 + s \cdot 0 = -12 \\ t \cdot 1,2 + r \cdot (-3) + s \cdot 0 = 1,8 \\ t \cdot (-4) + r \cdot (-2,7) + s \cdot (-2,7) = -4,54 \end{cases}$ <p>Nach Auflösen erhält man <math>t=1</math>, <math>r=-0,2</math> und <math>s=0,4</math>.</p> <p>Einsetzen von z.B. <math>t=1</math> in <math>k</math> ergibt als Schnittpunkt <math>Q(0 4,9 2,04)</math>.</p> <p>Der Punkt <math>Q</math> liegt zwischen den Eckpunkten des Garagentors, also ist der Lichtpunkt des Laserpointers auf dem Tor zu sehen (Lösung z.B. durch Einzeichnen in Abb. 2 oder Argumentation anhand der Koordinaten möglich).</p>	1	3	1
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>

**Aufgabe 6 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><math>X</math> : Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen kann als binomialverteilt mit <math>n = 25</math> und <math>p = 0,14</math> angenommen werden.</p> <p><math>P(X = 0) \approx 0,023</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit keinen suchtgefährdeten Jugendlichen dabei zu haben beträgt ca. 2,3 %.</p> <p><math>P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,733 = 0,267</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünf suchtgefährdete Jugendliche in der Gruppe sind, beträgt ca. 26,7 %.</p> <p><math>P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) \approx 0,733 - 0,023 = 0,710</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit mindestens einen und höchstens vier suchtgefährdete Jugendliche dabei zu haben beträgt ca. 71 %.</p> <p><math>0,11 \cdot 0,14 \approx 0,015 \hat{=} 1,5 \%</math></p> <p><math>Z</math> : Anzahl der jugendlichen, suchtgefährdeten Deutschen kann als binomialverteilt mit <math>n = 25</math> und <math>p = 0,015</math> bzw. <math>q = 1 - p = 0,985</math> angenommen werden.</p> <p><math>P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - q^{25} \approx 1 - 0,685 = 0,315</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit unter 25 zufällig ausgewählten Deutschen mindestens eine jugendliche, suchtgefährdete Person zu finden beträgt ca. 31,5 %.</p>	7	3	
b)	<p><math>I</math> : angesprochener Jugendlicher ist suchtgefährdet <math>\bar{I}</math> : angesprochener Jugendlicher ist nicht suchtgefährdet</p> <p><math>Y</math> : Die Anzahl der angesprochenen Personen, bis ein suchtgefährdeter Jugendlicher gefunden wird.</p> <p><math>P(Y = 3) = 0,86^2 \cdot 0,14 \approx 0,104</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass genau die dritte angesprochene Person ein suchtgefährdeter Jugendlicher ist, beträgt ca. 10,4 %.</p> <p><math>P(Y &gt; 3) = 0,86^3 \approx 0,636</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei befragten Jugendlichen kein suchtgefährdeter dabei ist, beträgt ca. 63,6 %.</p>	3	5	

c)	<p><math>H_0</math>: Der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen ist gleich geblieben, also <math>p_0 = 0,14</math>.</p> <p><math>X</math>: Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen</p> <p>Die Zufallsvariable <math>X</math> kann als binomialverteilt mit <math>n = 500</math> und <math>p_0 = 0,14</math> angenommen werden.</p> <p>Laut Tabelle gilt:</p> <p><math>P(X \geq 83) = 1 - P(X \leq 82) \approx 1 - 0,944 = 0,056 &gt; 0,05</math></p> <p><math>P(X \geq 84) = 1 - P(X \leq 83) \approx 1 - 0,957 = 0,043 &lt; 0,05</math></p> <p>Damit ist der Verwerfungsbereich <math>V = \{84; \dots; 500\}</math>. D.h., wenn mindestens 84 suchtgefährdete Jugendliche bei der Studie als suchtgefährdet eingestuft werden, wird angenommen, dass sich der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen vergrößert hat.</p> <p>Der Fehler entsteht, wenn das Ergebnis des Tests im Verwerfungsbereich liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis <math>k</math> im Verwerfungsbereich liegt, obwohl die Wahrscheinlichkeit für <math>X</math> bei <math>p_0 = 0,14</math> liegt, wird durch das Signifikanzniveau von 5 % begrenzt.</p>			
Verteilung der insgesamt <b>25</b> Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>2</b>	

## **Schriftliche Abiturprüfung 2015 im dritten Prüfungsfach**

### **Grundkurs Mathematik (TR)**

**Mittwoch, 22. April, 9.00 Uhr**

---

#### **Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer**

---

##### **Allgemeine Arbeitshinweise**

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

##### **Fachspezifische Arbeitshinweise**

- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
  - Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- 

##### **Aufgaben**

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, ...).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

**Aufgabe 1** - zum Themenbereich Analysis

**Küstenlinien**

In dieser Aufgabe sollen die Küstenlinien von zwei Inseln A und B untersucht werden.

- a) Die Küstenlinie der Insel B kann im Bereich  $-3 \leq x \leq 6$  mit der Funktion  $b$  mit

$$b(x) = -0,03x^3 + 0,24x^2 - 3$$

modelliert werden, wobei  $x$  und  $b(x)$  in Kilometern angegeben sind. Eine Abbildung des Graphen befindet sich im Anhang.

- Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des nördlichen Punktes  $N_b$  der Küstenlinie im Bereich  $-1 \leq x \leq 6$ .

Die gestrichelte Linie in der Abbildung im Anhang stellt den Graphen von  $f$  dar. Er zeigt den ungefähren Küstenverlauf der Insel B vor 100 Jahren. Zu dieser Zeit waren im Bereich  $-1 \leq x \leq 6$  die Koordinaten des südlichsten Punktes  $S_f(0|-4)$  und die des nördlichen Punktes  $N_f(4|-2,72)$ .

- Bestimmen Sie mit Hilfe dieser beiden Punkte eine ganzrationale Funktion  $f$  dritten Grades, welche den ursprünglichen Küstenverlauf der Insel B modelliert. (Hinweis: Dass die Funktion alle Bedingungen tatsächlich erfüllt, muss nicht nachgewiesen werden.)

(14 Punkte)

Die Küstenlinie der Insel A kann im Bereich  $-3 \leq x \leq 6$  mit der Funktion  $a$  mit

$$a(x) = 0,01x^4 - 0,08x^3 + 0,24x^2$$

modelliert werden, wobei  $x$  und  $a(x)$  in Kilometern angegeben sind. Eine Abbildung des Graphen von  $a$  befindet sich im Anhang.

- b) Am Südwestende der Insel A soll ein Vogelschutzgebiet eingerichtet werden. Dieses Gebiet wird im Norden von der Parallele zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $P(-3|5,13)$  begrenzt, im Osten durch die  $y$ -Achse und im Südwesten durch den Graph der Funktion  $a$ .

- Veranschaulichen Sie die Fläche des geplanten Vogelschutzgebietes im Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Gebietes unter Angabe einer Stammfunktion.

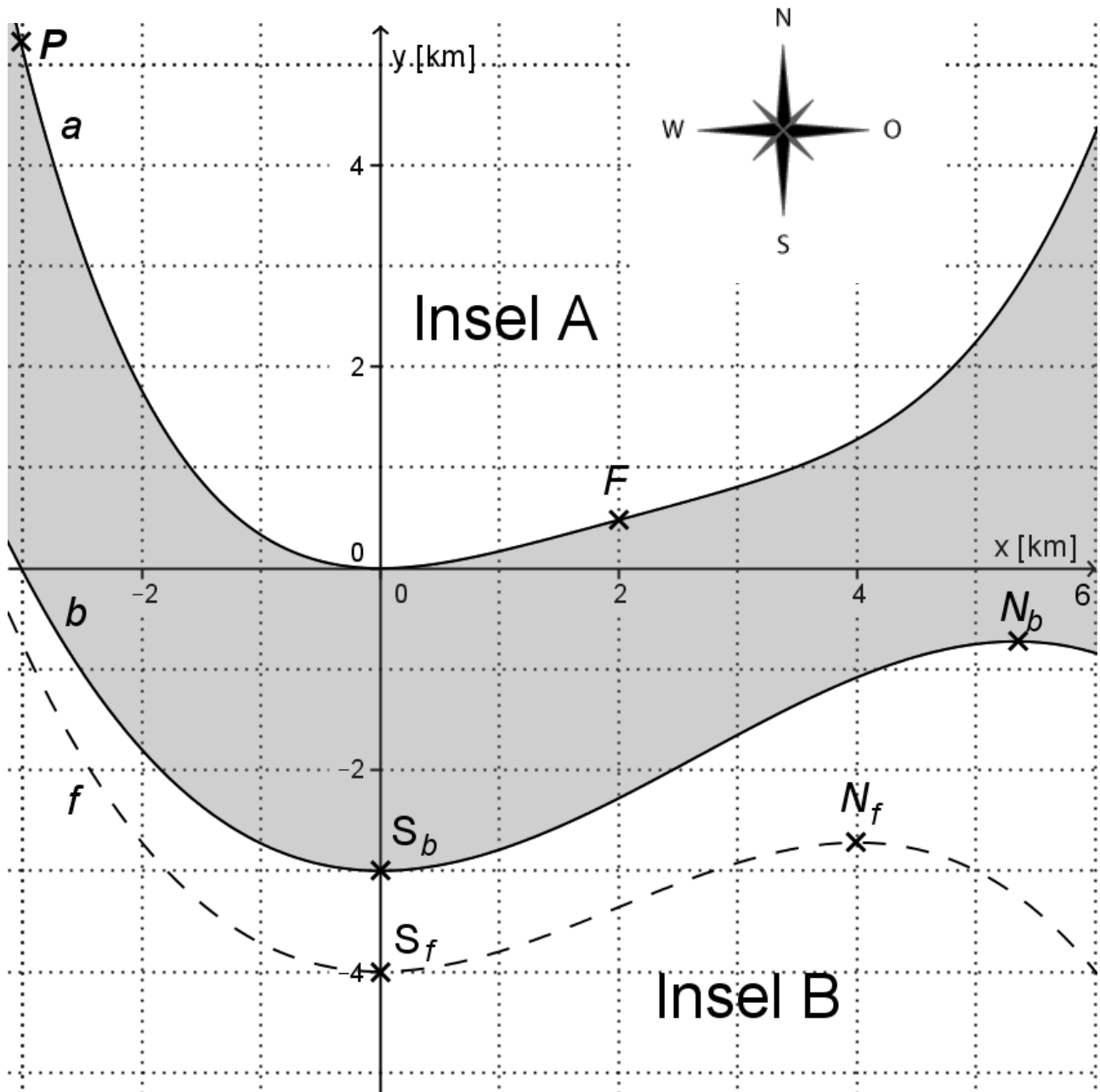
(5 Punkte)

- c) An der Ostküste der Insel A soll ein Fähranleger gebaut werden. Es wird vorgeschlagen, den Fähranleger im Punkt  $F(2|0,48)$  einzurichten und dort eine geradlinige Befestigungsmauer zu bauen.

- Bestimmen Sie dazu die Funktionsgleichung der Tangente  $t$ , die den Graph der Funktion  $a$  im Punkt  $F$  berührt.
- Bestimmen Sie die Größe des Winkels  $\alpha$ , den die Tangente  $t$  mit der Horizontalen einschließt.
- An der Küste der Insel A verläuft im Bereich  $1 < x < 3$  eine Befestigungsmauer entlang der Tangente  $t$ . Vom Punkt  $F$  aus soll eine Fähre senkrecht von der Befestigungsmauer in Richtung der Insel B fahren. Skizzieren Sie die geplante Strecke der Fähre in das Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie die Steigung  $m$  der Geraden  $h$ , die durch den Punkt  $F$  geht und senkrecht auf der Tangente  $t$  steht.

(6 Punkte)

Anhang





**Aufgabe 2** - zum Themenbereich Analysis

**Weltbevölkerungsprognosen**

Die bekanntesten Schätzungen zur Entwicklung der Weltbevölkerung stammen von den Forschern der Vereinten Nationen (UN). Die Forscher veröffentlichen verschiedene Varianten, von denen drei in den einzelnen Aufgabenteilen betrachtet werden. Eine Grafik mit den zwei Varianten aus den Aufgabenteilen b) und c) finden Sie im Anhang<sup>1</sup>.

Auf der Welt lebten Anfang des Jahres 2013 ca. 7,14 Milliarden Menschen.  $t = 0$  entspricht in allen folgenden Aufgabenteilen dem Anfang des Jahres 2013.

a) In den letzten Jahren lag die Wachstumsrate der Weltbevölkerung konstant bei 1,2% pro Jahr. Es wird angenommen: Die Weltbevölkerung entwickelt sich so wie in den letzten Jahren weiter.

- Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(t) = 7,14 e^{0,0119t}; \quad t \geq 0$$

diese Entwicklung der Weltbevölkerung modelliert. Dabei gibt  $f(t)$  die Bevölkerung in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Jahren ab 2013 an.

- Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung schrieb im Jahr 2013: „*Bliebe die (Wachstums-)rate konstant auf dem heutigen Niveau, gäbe es 2050 sogar schon 11 Milliarden Menschen auf der Welt*“. Untersuchen Sie, ob diese Aussage stimmt.
- Bestimmen Sie, in welchem Jahr bei dieser Entwicklung die 8-Milliarden-Grenze überschritten wird.
- Skizzieren Sie mit Hilfe der Werte zu 2020, 2030; 2040 und 2050 den Graphen von  $f$  im Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie  $f'(t)$ . Geben Sie dabei den Faktor vor „ $e$ “ auf 3 Nachkommastellen genau an.
- Berechnen Sie  $f'(5)$  auf zwei Nachkommastellen genau.
- Interpretieren Sie  $f'(5)$  im Sachzusammenhang.

(11 Punkte)

b) Bei der Variante der UN-Prognose zur Weltbevölkerung in diesem Aufgabenteil gehen die Forscher ebenfalls von einem hohen Bevölkerungswachstum aus, jedoch nicht von einem exponentiellen Wachstum. Wird der Graph zu dieser hohen Variante betrachtet, so scheint die angenommene Entwicklung ab etwa 2018 linear zu verlaufen (siehe Anlage).

Anfang 2018, das heißt ab dem Zeitpunkt  $t = 5$ , wird von einer Bevölkerungszahl von 7,58 Milliarden und einer gleichmäßigen jährlichen Zunahme von 0,09 Milliarden Menschen pro Jahr ausgegangen.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung  $h(t)$  einer Geraden, welche die Entwicklung der Weltbevölkerung ab Anfang 2018 ( $t = 5$ ) beschreibt. Dabei gibt  $h(t)$  die Bevölkerung in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Jahren ab 2013 ( $t = 0$ ) an, es werden jedoch nur Werte für  $t \geq 5$  eingesetzt. Der Graph von  $h$  schließt bei  $t = 5$  an die exponentielle Modellierung an. Rechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau.
- Vergleichen Sie den Wert von  $h(t)$  für 2050 mit dem entsprechenden Wert aus der Grafik der Anlage für die Variante Aufgabenteil b).
- Von Anfang des Jahres 2018 bis Anfang 2019 wuchs die Weltbevölkerung nach diesem Modell um ca. 1,2%. Berechnen Sie die prozentuale Zunahme von Anfang des Jahres 2033 bis Anfang 2034 auf eine Nachkommastelle genau.
- Erläutern Sie, warum die jährliche prozentuale Zunahme bei diesem linearen Modell  $h$  abnimmt.

(7 Punkte)

<sup>1</sup> Die den Aufgaben zugrundeliegenden Daten stammen aus World Population Prospects, The 2012 Revision, United Nations New York 2013 und den im Jahr 2014 veröffentlichten Werten (hier nach „Info Weltbevölkerung“ der DSW).

- c) Die Forscher der UN nennen die Variante, die in diesem Aufgabenteil betrachtet wird, „mittlere Variante“. Wir beschreiben diese mittlere Variante durch die Funktion  $m$  mit

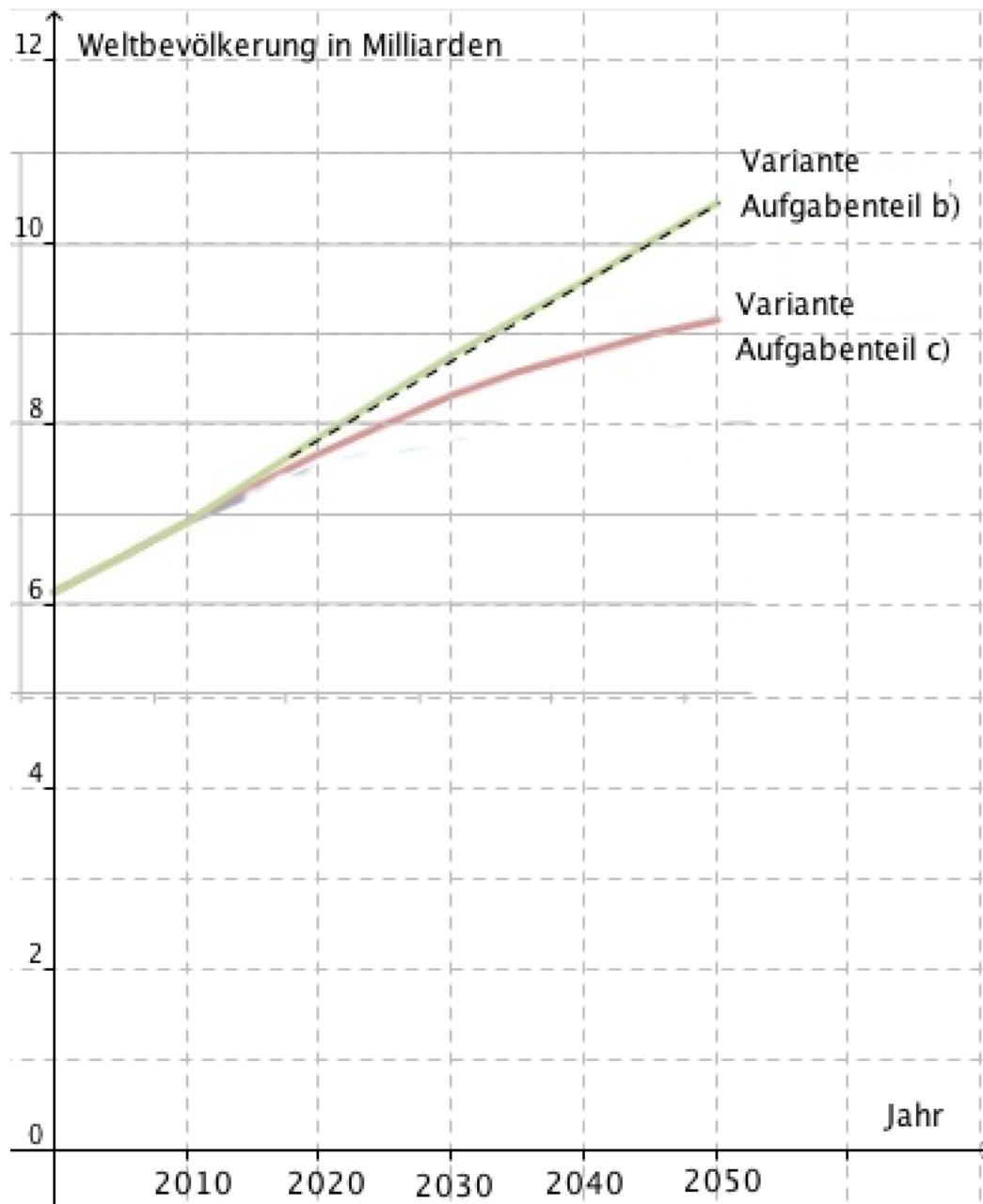
$$m(t) = 11 - 3,86e^{-0,0256t}; \quad t \geq 0$$

wobei  $m(t)$  die Bevölkerungszahl in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Jahren nach 2013 beschreibt.

- Überprüfen Sie, ob das Modell zur Anzahl der Menschen im Jahr 2013 ( $t = 0$ ) passt.
- Bestimmen Sie die momentane Zuwachsrate der Weltbevölkerung Anfang 2013 ( $t = 0$ ) nach diesem Modell.
- Untersuchen Sie, was die Modellierung mit der Funktion  $m$  auf lange Sicht für die Entwicklung der Weltbevölkerung aussagt.
- Es gilt  $I_1 = \int_7^8 m'(t) dt \approx 0,08$ . Berechnen Sie  $I_2 = \int_{27}^{28} m'(t) dt$  auf zwei Nachkommastellen genau.
- Interpretieren Sie den Unterschied der beiden Werte im Sachzusammenhang.

(7 Punkte)

Anhang<sup>2</sup>



<sup>2</sup> Quelle der Grafik: [http://www.berlin-institut.org/newsletter/1291624141\\_UN-Wachstumsprognosen.jpg](http://www.berlin-institut.org/newsletter/1291624141_UN-Wachstumsprognosen.jpg) (Zugriff 19.6.2014). Die Grafik wurde in ein Koordinatensystem eingebettet, eine dritte Variante wurde weggelassen.

**Aufgabe 3** - zum Themenbereich Analysis

**$CO_2$ -Verbrauch einer Tomatenpflanze**

Gegeben ist die trigonometrische Funktion  $f$  mit

$$f(t) = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right) + 7, \text{ mit } t \in [0; 28].$$

a) Die Funktion  $f$  wird untersucht:

- Geben Sie Amplitude der Funktion  $f$  an.
- Berechnen Sie die Periodenlänge der Funktion  $f$ .
- Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion  $f$  ohne Verwendung von Ableitungen.
- Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion  $f$ .
- Zeichnen Sie die berechneten Punkte im Koordinatensystem in Abbildung 2 im Anhang ein und skizzieren Sie den Graphen der Funktion. Dort sind bereits ein anderer Graph und eine Messkurve eingetragen.

(10 Punkte)

Pflanzen erzeugen bei Lichteinwirkung Sauerstoff aus  $CO_2$ .  
Dieser Prozess heißt Photosynthese.

Bei Dunkelheit dagegen wird Sauerstoff in  $CO_2$  umgewandelt und an die Luft abgegeben. Dieser Prozess heißt Zellatmung.

**Messkurve**

<http://www.bio.vobs.at/botanik/b-photosynthese-2.php>

Die Messkurve in Abbildung 1 stellt das Ergebnis einer Luftmessung dar.

Es wurde gemessen, wie viel  $CO_2$  der Luft pro Zeit durch eine Tomatenpflanze verbraucht wird (in Milligramm pro Stunde).

**Abbildung 1**

*$CO_2$ -Verbrauch einer Tomatenpflanze*

Tagsüber verbraucht die Tomatenpflanze  $CO_2$ , d.h. sie nimmt  $CO_2$  aus der Luft auf.<sup>3</sup> Umgekehrt gibt die Tomatenpflanze nachts  $CO_2$  ab, d.h. der  $CO_2$ -Verbrauch der Tomatenpflanze ist negativ.

Die trigonometrische Funktion  $g$  mit

$$g(t) = 11 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right) + 8, \text{ mit } t \in [0; 28]$$

modelliert den oben genannten  $CO_2$ -Verbrauch.  $t$  ist die Zeit in Stunden nach Messbeginn und  $t=0$  entspricht dem Beginn der Messung um Mitternacht.  $g(t)$  gibt an, wie viel  $CO_2$  der Luft in Milligramm pro Stunde zum Zeitpunkt  $t$  von der Tomatenpflanze näherungsweise verbraucht wird.

Der Graph der Funktion  $g$  und die Messkurve sind bereits in beiden Koordinatensystemen im Anhang eingetragen.

b) Auch die Funktion  $f$  aus Aufgabenteil a) ist ein Modell des  $CO_2$ -Verbrauchs der Tomatenpflanze.

- Nennen Sie zwei Unterschiede in den Funktionen  $f$  und  $g$ .
- Begründen Sie mit einem Argument, warum die Funktion  $g$  für die Modellierung besser geeignet ist als die Funktion  $f$ .

(2 Punkte)

<sup>3</sup> Streng genommen handelt es sich um einen Austauschprozess und damit um eine Bilanz: die Tomatenpflanze entnimmt tagsüber der Luft mehr  $CO_2$  als sie gleichzeitig abgibt.

c) In diesem Aufgabenteil wird die Modellierung des  $CO_2$ -Verbrauchs durch die Funktion  $g$  an einer Stelle genauer untersucht. Bitte verwenden Sie für diesen Aufgabenteil wieder das Koordinatensystem in Abbildung 2 im Anhang.

- Berechnen Sie die Funktionswerte  $g(7)$  und  $g'(7)$ .
- Skizzieren Sie die Tangente an die Messkurve an der Stelle  $t = 7$ .
- Geben Sie den ungefähren  $y$ -Wert der Messkurve an der Stelle  $t = 7$  an.
- Ermitteln Sie näherungsweise graphisch die Steigung der Messkurve an der Stelle  $t = 7$ .

Sie haben nun an der Stelle  $t = 7$  sowohl für die Funktion  $g$  als auch für die Messkurve jeweils den Funktionswert und den Steigungswert ermittelt.

- Vergleichen Sie die beiden Funktionswerte und die beiden Steigungswerte im Sachzusammenhang und interpretieren Sie die Ergebnisse Ihrer Vergleiche in Bezug auf die Modellierung.

(8 Punkte)

d) Wir betrachten nun Integralwerte.

- Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion  $g$  an.

- Es gilt:  $I_B = \int_{21,1}^{26,9} g(t)dt \approx -11,45$ .

Berechnen Sie den Integralwert

$$I_A = \int_{2,9}^{21,1} g(t)dt$$

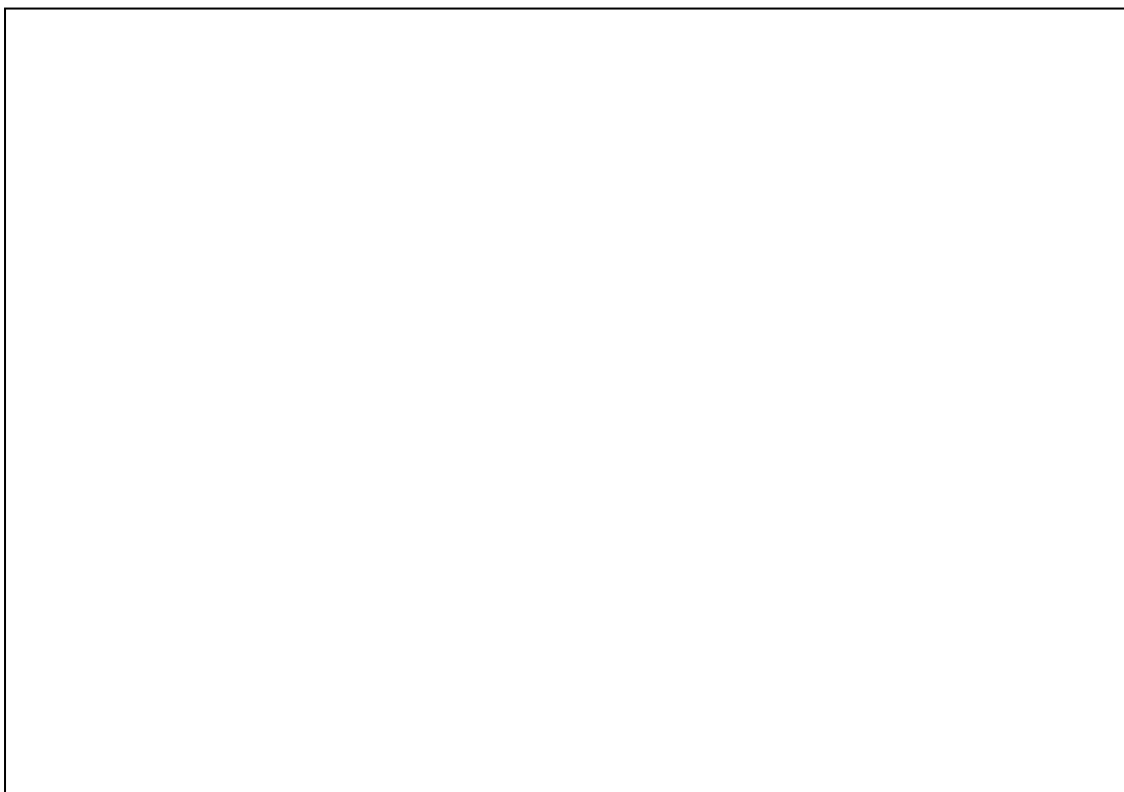
und den Wert

$$I_A + I_B.$$

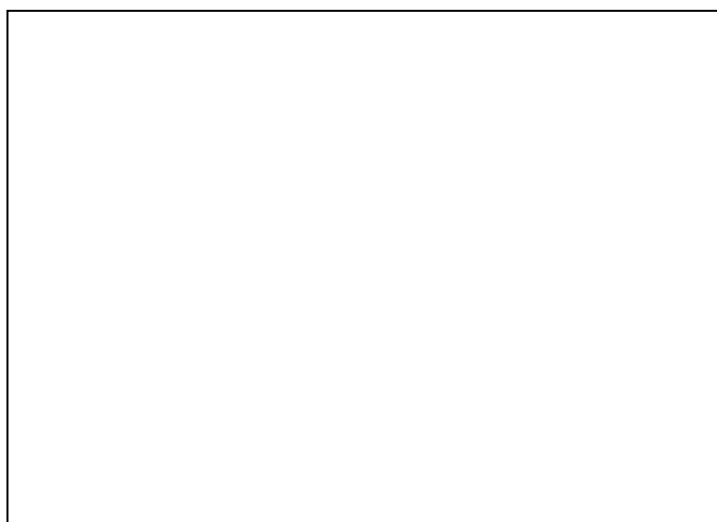
- Veranschaulichen Sie  $I_A$  und  $I_B$  im Koordinatensystem in Abbildung 3 im Anhang.
- Interpretieren Sie den Integralwert  $I_A + I_B$  im Sachzusammenhang, also bezüglich des  $CO_2$ -Verbrauchs.

(5 Punkte)

## Anhang



**Abbildung 2** – für die Aufgabenteile a) und c)  
Messkurve und Graph der Funktion  $g$



**Abbildung 3** – für die Veranschaulichung in Aufgabenteil d)  
Messkurve und Graph der Funktion  $g$  (wie oben in Abbildung 2)

Quelle der Messkurve: <http://www2.vobs.at/bio/botanik/b-photosynthese-2.htm>, 08.06.2014

**Aufgabe 4** - zum Themenbereich Lineare Algebra

**Klebstoff**

Ein Klebstoffhersteller produziert in zwei Stufen hochwertige Klebstoffe.

In der ersten Stufe werden aus den drei Grundstoffen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  die drei Zwischenprodukte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  produziert. In der zweiten Stufe werden aus diesen drei Zwischenprodukten die zwei Klebstoffsorten  $K_1$  und  $K_2$  produziert.

Die nachstehenden beiden Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Grundstoffe in je eine ME der Zwischenprodukte und wie viele ME der Zwischenprodukte in jeweils eine ME einer Klebstoffsorte eingehen. Zu den beiden folgenden Tabellen gehören die Matrizen  $A_{GZ}$  und  $B_{ZK}$  mit den entsprechenden Zahlen.

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$G_1$	1	2	1
$G_2$	0	1	0
$G_3$	2	0	1

	$K_1$	$K_2$
$Z_1$	2	0
$Z_2$	1	1
$Z_3$	2	1

Gegeben ist  $C_{GK} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

a)

- Erstellen Sie für den Produktionsprozess der Klebstoffe das zugehörige Verflechtungsdiagramm.
- Zeigen Sie mithilfe von Matrizenrechnung, dass die Matrix  $C_{GK}$  die erforderlichen ME der einzelnen Grundstoffe für jeweils eine ME einer Klebstoffsorte beschreibt.  
 Geben Sie dabei für ein beliebiges Matrixelement von  $C_{GK}$  den Berechnungsweg an.

Es werden 20 ME Klebstoffe von  $K_1$  und 30 ME Klebstoffe von  $K_2$  bestellt.

- Bestimmen Sie mithilfe einer Matrix-Vektor-Rechnung jeweils die ME der Grundstoffe, welche für diese Bestellung erforderlich sind.

Die Kosten der Grundstoffe betragen 45 Cent je ME von  $G_1$ , 25 Cent je ME von  $G_2$  und 40 Cent je ME von  $G_3$ .

- Berechnen Sie mithilfe einer Matrix-Vektor-Rechnung die Kosten der Grundstoffe in Euro für die Produktion von jeweils einer ME Klebstoff  $K_1$  und einer ME Klebstoff  $K_2$ .

(11 Punkte)

b) Der Produktionsleiter erhält den Auftrag, einen Restbestand von 38 ME von  $G_1$ , 8 ME von  $G_2$  und 34 ME von  $G_3$  vollständig zu verbrauchen.

- Bestimmen Sie für diesen Auftrag die ME der Zwischenprodukte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$ , welche dann produziert werden können.

(4 Punkte)

c) Gegeben ist die Matrix-Vektorgleichung  $C_{GK} * \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ g_3 \end{pmatrix}$ .

- Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung  $k_1$ ,  $k_2$  und  $g_3$  so, dass die obige Matrix-Vektorgleichung erfüllt ist.
- Interpretieren Sie diese Matrix-Vektorgleichung und die Werte für  $k_1$ ,  $k_2$  und  $g_3$  im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

d) Gegeben sind die Matrizen

$$(A_{GZ})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix} \text{ und } A_{GZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man in  $(A_{GZ})^{-1}$  für  $a$  und  $b$  jeweils eine passende Zahl ein, so ist sie die Inverse von  $A_{GZ}$ .

- Bestimmen Sie, ohne den Einsatz eines Rechners, jeweils für  $a$  und  $b$  solch eine passende Zahl.

Gegeben ist eine quadratische Matrix  $M$  und die Inverse Matrix  $M^{-1}$  zu  $M$ .

- Zeigen Sie allgemein mithilfe von Umformungen, dass aus der Matrix-Vektorgleichung  $M * \vec{x} = \vec{y}$  die Gleichung  $\vec{x} = M^{-1} * \vec{y}$  folgt.

(5 Punkte)



**Aufgabe 5** - zum Themenbereich Analytische Geometrie

**Garage**

Eine Garage befindet sich neben einem Haus auf einer kleinen Anhöhe. Die Garageneinfahrt ist ein gerader Weg, der die Straße direkt mit der Garage verbindet.

Die Punkte  $A$  bis  $D$  und  $E$  bis  $H$  bilden die Eckpunkte der quaderförmigen Garage. Sie ist in Abbildung 2 (siehe Anhang) bereits eingezeichnet. An den Punkten  $I$  und  $J$  grenzt die Einfahrt der Garage an die Straße. Die Garageneinfahrt verläuft also von  $I$  und  $J$  aus zu den Punkten  $A$  und  $B$  der Garage.

Alle Koordinaten der Punkte sind im Anhang aufgelistet. Eine Längeneinheit entspricht  $1\text{ m}$ .

Eine Längeneinheit entspricht  $1\text{ m}$ .

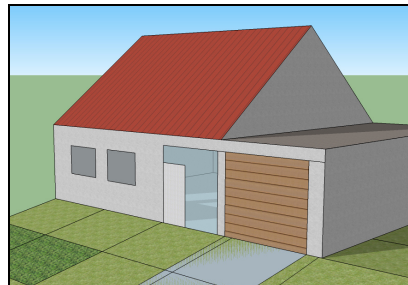


Abb.1: Garage mit Einfahrt

a)

- Zeichnen Sie die Punkte  $I(5|3,5|0)$  und  $J(5|6,5|0)$  in Abb. 2 ein.
- Zeichnen Sie nach den obigen Angaben die Garageneinfahrt (das Viereck  $BAIJ$ ).
- Untersuchen Sie mit Hilfe von Berechnungen, welche Art von Viereck das Viereck  $BAIJ$  ist.

(5 Punkte)

b) Im Punkt  $F$  der Garage befindet sich ein Bewegungsmelder, der nur dann eine Lampe am Haus einschalten soll, wenn jemand von der Straße aus das Grundstück betritt. Fußgänger, die auf der Straße am Haus vorbei gehen, sollen das Licht nicht aktivieren. Die Straße grenzt gradlinig an das Grundstück entlang der Punkte  $I$  und  $J$  (also ohne dazwischen liegenden Gehweg). Der Bewegungsmelder ist so eingestellt, dass er auf Bewegungen in  $6\text{ m}$  Entfernung (oder weniger) reagiert.

- Bestimmen Sie eine Geradengleichung für die Gerade  $g$ , die durch die Punkte  $I$  und  $J$  verläuft. Diese Gerade stellt den Verlauf des Straßenrands dar.
- Bestimmen Sie die gegenseitige Lage zwischen der Gerade  $g$  und einer Gerade  $h$  mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

- Zeichnen Sie die Gerade  $h$  in das Koordinatensystem im Anhang.
- Der Punkt  $P(5|5,5|1,5)$  befindet sich auf der Geraden  $h$ . Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Punkten  $P$  und  $F$ .
- Beurteilen Sie Ihr Ergebnis im Rahmen des Sachkontexts.

(10 Punkte)

c) Die Garageneinfahrt  $BAIJ$  kann als Ausschnitt einer Ebene  $E_1$  mit der Parametergleichung

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R} \text{ dargestellt werden.}$$

- Zeigen Sie durch Berechnungen, dass der Vektor  $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$  senkrecht zu  $E_1$  ist.

- Bestimmen Sie den Winkel zwischen  $\vec{n}_1$  und dem Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Interpretieren Sie das errechnete Ergebnis im Sachkontext.

(5 Punkte)

d) Gegenüber der Garage steht ein mehrstöckiges Haus mit Balkonen. Ein Junge spielt dort auf einem der Balkone verbotenerweise mit einem Laserpointer. Ein Laserpointer ist ein Gerät, das einen Lichtpunkt dort erzeugt, wohin mit dem Lichtstrahl gezielt wird. Der Junge zielt auf das Garagentor. Das Garagentor wird durch das Rechteck  $ABFE$  beschrieben. Der Lichtstrahl des Laserpointers ist gradlinig und wird durch die Gerade  $k$  mit

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3,7 \\ 6,04 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1,2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ beschrieben. Eine Längeneinheit entspricht } 1 \text{ m.}$$

- Erläutern Sie, dass das Garagentor einen Ausschnitt der Ebene  $E_2$  mit der Parametergleichung

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix}, \text{ mit } r, s \in \mathbb{R} \text{ darstellt.}$$

- Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $Q$  der Gerade  $k$  und der Ebene  $E_2$ .
- Der berechnete Schnittpunkt ist die Stelle, wo der Lichtpunkt auf die Wand des Hauses mit dem Garagentor trifft. Entscheiden Sie, ob der Lichtpunkt auf dem Tor selbst zu sehen ist.

(5 Punkte)

Anhang:

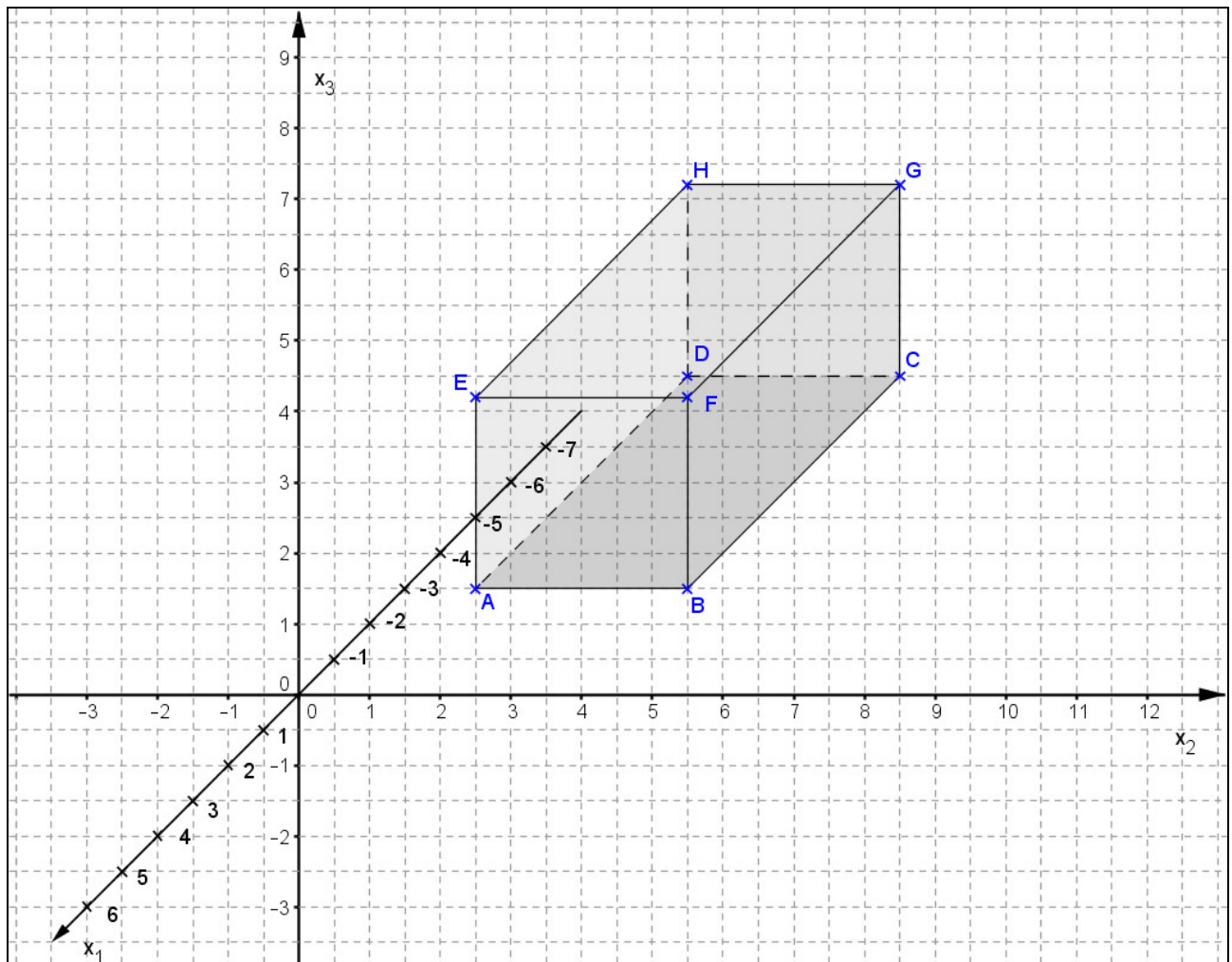


Abb. 2: Koordinatensystem mit bereits eingezeichneter Garage

Für die Aufgabe verwendete Punktkoordinaten:

Garage:

$A(0|2,5|1,5)$ ,  $B(0|5,5|1,5)$ ,  $C(-6|5,5|1,5)$ ,  $D(-6|2,5|1,5)$

$E(0|2,5|4,2)$ ,  $F(0|5,5|4,2)$ ,  $G(-6|5,5|4,2)$ ,  $H(-6|2,5|4,2)$

Grenzpunkte zwischen Einfahrt und Straße:

$I(5|3,5|0)$ ,  $J(5|6,5|0)$

**Aufgabe 6** - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Material: Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung

**Internetsucht**

Viele Jugendliche zeigen ein problematisches Verhalten im Umgang mit dem Internet. Die sogenannte PINTA-Studie für das Bundesministerium für Gesundheit untersuchte unter anderem die Internetsucht junger Deutscher im Alter von 14 bis 24 Jahren, die im Folgenden als „Jugendliche“ bezeichnet werden. Der Studie zu Folge gelten rund 14 % der Jugendlichen als suchtgefährdet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen genau.

a) Es werden 25 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt.  $X$  gibt die Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen an.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein suchtgefährdeter Jugendlicher dabei ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens fünf suchtgefährdete Jugendliche dabei sind.
- Bestimmen Sie  $P(1 \leq X \leq 4)$  und erläutern Sie die Bedeutung des Werts im Sachzusammenhang.

Die Jugendlichen stellen einen Anteil von ca. 11 % an der deutschen Gesamtbevölkerung.

- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Deutscher ein Jugendlicher und zudem noch suchtgefährdet ist, ca. 1,5 % beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 zufällig ausgewählten Deutschen mindestens eine jugendliche und zudem suchtgefährdete Person ist.

(10 Punkte)

b) Für ein Interview wird ein suchtgefährdeter Jugendlicher gesucht. Dazu werden nun so lange Personen der entsprechenden Altersgruppe angesprochen, bis eine solche gefunden ist.

- Veranschaulichen Sie diesen Vorgang in einem Baumdiagramm. Zeichnen Sie das Baumdiagramm mit mindestens vier Stufen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau die dritte angesprochene Person ein suchtgefährdeter Jugendlicher ist.

$Y$  gibt die Anzahl der angesprochenen Personen an, bis ein suchtgefährdeter Jugendlicher gefunden wird.

- Berechnen Sie  $P(Y > 3)$ .
- Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(8 Punkte)

c) Die PINTA-Studie stammt aus dem Jahre 2011. Es wird vermutet, dass sich der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen vergrößert hat. Dies soll mithilfe eines Hypothesentests untersucht werden.

- Geben Sie eine sinnvolle Nullhypothese  $H_0$  zur Hypothese  $H_1$ : *Der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen hat sich vergrößert:  $p_1 > 0,14$*  an.
- Geben Sie die Zufallsvariable  $X$  an.
- Bestimmen Sie für eine Befragung von  $n = 500$  Personen und einem Signifikanzniveau von 5 % eine Entscheidungsregel für den Test. (Zur Kontrolle:  $V = \{84; \dots; 500\}$  .)

Bei einem statistischen Test können Fehlentscheidungen vorkommen. Zum Beispiel könnte es sein, dass nach der Durchführung des Tests angenommen wird, dass sich der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen vergrößert hat, obwohl es tatsächlich nicht so ist.

- Erläutern Sie, welchen Einfluss das Signifikanzniveau und der Verwerfungsbereich auf diesen Fehler haben.

(7 Punkte)

**Material:** Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung  $B_{n; 0,14}$

$k$	$B_{25; 0,14}$	$B_{500; 0,14}$
0	0,023	
1	0,117	
2	0,300	
3	0,529	
4	0,733	
5	0,873	
6	0,949	
7	0,983	
8	0,995	
9	0,999	
10	1,000	
11	1,000	Alle fehlenden Einträge würden durch das Runden auf 3 Nachkommastellen den Wert 0,0000 erhalten.  Das gilt auch für die nicht aufgeführten Werte von $k$ .
12	1,000	
13	1,000	
14	1,000	
15	1,000	
16	1,000	
17	1,000	
18	1,000	
19	1,000	
20	1,000	
21	1,000	
22	1,000	
23	1,000	
24	1,000	
25	1,000	
...		
46		0,001
47		0,001
48		0,002
49		0,003
50		0,005
51		0,007
52		0,010
53		0,014
54		0,020
55		0,028
56		0,038
57		0,051
58		0,066
59		0,086

$k$		$B_{500; 0,14}$
60		0,109
61		0,136
62		0,167
63		0,202
64		0,242
65		0,284
66		0,330
67		0,379
68		0,429
69		0,480
70		0,532
71		0,582
72		0,632
73		0,678
74		0,722
75		0,763
76		0,800
77		0,833
78		0,863
79		0,888
80		0,910
81		0,929
82		0,944
83		0,957
84		0,967
85		0,975
86		0,981
87		0,986
88		0,990
89		0,993
90		0,995
91		0,996
92		0,997
93		0,998
94		0,999
95		0,999
96		0,999
...		Alle weiteren Werte von $k$ würden durch das Runden auf 3 Nachkommastellen den Wert 1,0000 erhalten.