Die Senatorin
für Kinder und Bildung

Freie Hansestadt Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2019 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Freitag, 3. Mai 2019, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421…)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen **Analysis**, **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**. Im Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.

- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, kommen die Aufgaben aus den Themenbereichen **Analysis**, **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**. Im Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt jeweils in einem der beiden Themen haben. Den Schülerinnen und Schülern werden drei Aufgaben vorgelegt- Der Fachprüfungsausschuss wählt in den Themenbereichen **Analysis** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie** jeweils eine der beiden vorgelegten Aufgaben aus, die Aufgabe aus dem Themenbereich **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** ist verpflichtend. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 1				
a)	$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0 \vee x=2$.	1	1	
b)	$f'(x)=x^2-\frac{4}{3}$ $f'(x)$ nimmt für $x=0$ den kleinsten Wert an, die Tangente mit der kleinsten Steigung hat also die Steigung $-\frac{4}{3}$.			3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**1**	**3**

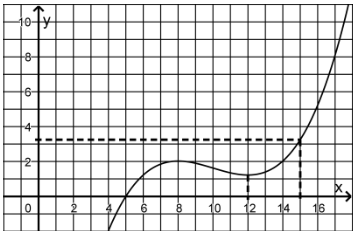
Aufgabe 2				
a)	Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau als zweites Mitglied mitfährt, beträgt $\frac{11}{20}$.	1		
b)	Die Anzahl der Frauen unter den anderen Mitgliedern ist größer als die der Männer.	1		
c)	M: Mann wird ausgesucht F: Frau wird ausgesucht Zweistufiger Zufallsversuch: P(ein Mann und eine Frau werden ausgesucht) =P(MF)+P(FM) $=\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{19}+\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{19}$ $=\frac{99}{190}$ (oder $\frac{\binom{11}{1}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{20}{2}}=\frac{99}{190}$)		3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

Aufgabe 3				
a)	$1-\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{51}{100}$	2		
b)	Mögliche Begründungen: Abb.1: Der Erwartungswert von X ist 7. Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei der entnommenen Kugeln weiß sind, nicht am größten. Abb.2: Die Summe der Werte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist nicht größer als 1.		3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

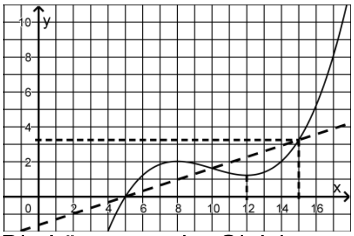
Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 4				
a)	Z.B.: Die Gerade g steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene, weil sich die Punkte $B_z(3,2,z)$ nur in der x_3-Koordinate unterscheiden.		1	1
b)	$\left\lvert\overrightarrow{AB_z}\right\rvert = \sqrt{2^2+2^2+(z-1)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{z^2-2z+9} = 3$. Daraus folgt durch Quadrieren der Wurzelgleichung: $z^2-2z=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=2$.		1	2
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**0**	**2**	**3**

		I	II	III
Aufgabe 5				
a)	$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1		
b)	Jeweils innerhalb von drei Monaten verändern sich die Anzahlen der Eier, Larven und Käfer mit dem Faktor $\frac{a}{8}$. Für $a<8$ stirbt die Population langfristig aus, für $a=8$ erreichen die Anzahlen der Eier, Larven und Käfer alle drei Monate die Anfangswerte und für $a>8$ nehmen diese Anzahlen dauerhaft zu.		1	3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**1**	**3**

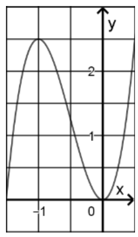
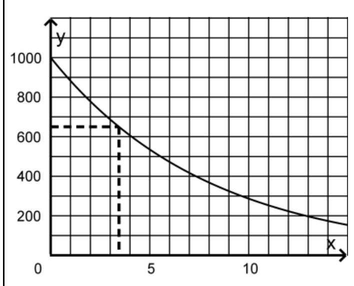
Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(0)=80$ $f(2)\approx 143$
Die Ergebnisse sind jeweils die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute.
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=180$. Für eine große Laufzeit nähert sich die Herzfrequenz 180 Herzschlägen pro Minute an.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$F'(t)=180+(-0{,}5)\cdot 200\cdot e^{-0{,}5t}=180-100\cdot e^{-0{,}5t}=f(t)$
$\int_0^{10} f(t)\,dt\approx 1601$.
Die gesamte Anzahl der Herzschläge in den ersten 10 Minuten beträgt ca. 1601.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$s(0)=190-a\cdot e^{b\cdot 0}=70\Rightarrow a=120$.
$s(3)=190-120\cdot e^{b\cdot 3}=160\Rightarrow b=\frac{\ln(0{,}25)}{3}\approx -0{,}46$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Ab $12\frac{km}{h}$ steigt die Laktatkonzentration an, bei $15\frac{km}{h}$ überschreitet die Laktatkonzentration $3{,}25\frac{mmol}{h}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$k'(x)=0{,}075x^2-1{,}5x+7{,}2$. Aus $k'(11)=-0{,}225$ folgt, dass bei einer Geschwindigkeit von $11\frac{km}{h}$ die Laktatkonzentration um $0{,}225\frac{mmol}{h}$ pro $\frac{km}{h}$ abnimmt.
$k''(x)=0{,}15x-1{,}5$ und $k'''(x)=0{,}15$. Aus $k''(x)=0$ folgt $x=10$. Aus $k''(10)=0\wedge k'''(10)=0{,}15\neq 0$ folgt, dass sich die Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $10\frac{km}{h}$ am schnellsten abnimmt.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3				
a)	Die Punktprobe ergibt $\frac{13}{40}\cdot 10-\frac{13}{8}=\frac{13}{8}$; also liegt W auf g.  Die Lösungen der Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von k und g. Lösungen aus der Graphik ablesen: $x_1=5$, $x_2=10$, $x_3=15$.	6		
b)	Der linke Term der Gleichung bestimmt den mittleren Funktionswert von k im Intervall $5\le x\le 15$ und aufgrund der Symmetrie des Graphen von k bezüglich seines Wendepunktes stellt der Funktionswert des Wendepunktes ebenfalls den Mittelwert der Funktionswerte von k dar.			4
c)	$k'(10)=-0,3$ Unter Berücksichtigung des Graphen von k ergibt sich für die Steigungen m der Geraden g durch den Wendepunkt $m\in\left]-\infty;-0,3\right]$.			3
Verteilung der insgesamt 32 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**15**	**7**

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
1				
a)	Die gesuchte Funktionsgleichung hat die Form $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Da $(0 \mid 0)$ Tiefpunkt ist, gilt $c = d = 0$. Damit: $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $g''(x) = 6ax + 2b$ Mit $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2b = a + 10$ ergibt sich: $g''\left(-\frac{1}{2}\right) = -3a + a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = 5$, d. h. $b = \frac{15}{2}$. Damit $g(x) = 5x^3 + \frac{15}{2}x^2$.  $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}$ und damit $\tan\alpha = -\frac{15}{4}$ d. h. $\alpha \approx -75°$ Die Größe des Winkels mit dem x-Achse beträgt etwa 75°.	2	9	
b)	$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d. h. der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ der x-Achse an. $h'(x) = 5 \cdot e^{-2 \cdot x^2} + 5x \cdot e^{-2 \cdot x^2} \cdot (-4x) = \left(5 - 20 \cdot x^2\right) \cdot e^{-2 \cdot x^2}$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5 \vee x = 0{,}5$, $h(-0{,}5) = -2{,}5 \cdot e^{-0{,}5} \approx -1{,}52$, $h(0{,}5) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5} \approx 1{,}52$ Damit: $\left(-0{,}5 \mid -2{,}5 \cdot e^{-0{,}5}\right)$, $\left(0{,}5 \mid 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5}\right)$ sind die Extrempunkte. Da $h''(0{,}5) < 0$, $h''(-0{,}5) > 0$ folgt $H\left(0{,}5 \mid 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5}\right)$ und $T\left(-0{,}5 \mid -2{,}5 \cdot e^{-0{,}5}\right)$.	3	6	
2				
a)	Die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt, ist etwa 3,4 km. 			

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
	Z.B: Die Begründung könnte mit folgendem Beweis erfolgen: $p(x+d)=\frac{1}{2}\cdot p(x) \Leftrightarrow 1000e^{-\frac{x+d}{8}}=500e^{-\frac{x}{8}} \Leftrightarrow e^{-\frac{d}{8}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow d=8\cdot\ln 2\approx 5{,}545$ Die Höhenänderung beträgt etwa 5,5 km. $p'(x)=-125e^{-\frac{x}{8}}$, $p'(1{,}785)=-125e^{-\frac{1{,}785}{8}}\approx -100$, d. h. die lokale Änderungsrate beträgt etwa $-100\,\frac{\text{hPa}}{\text{km}}$.	5		3
b)	$1000e^{-\frac{x}{8}}=700$ liefert $x=-8\cdot\ln\frac{700}{1000}\approx 2{,}853$. Die Bergsteiger befinden sich in einer Höhe von etwa 2,853 km. Die Faustregel liefert eine Höhe von 2,785 km. Die prozentuale Abweichung ist $\frac{2{,}853-2{,}785}{2{,}853}\approx 0{,}024$ d. h. die Abweichung beträgt etwa 2,4%.< 5%. Die Faustregel ist gut.			4
Verteilung der insgesamt 32 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**15**	**7**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Die Zufallsgröße X hat die Parameter $n = 200$ und $p = 0{,}8$.

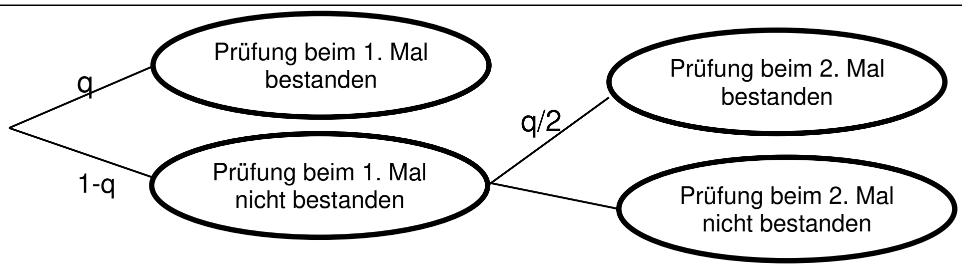
$P(X = 158) \approx 6{,}5\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 158 Personen unter den 200 ausgewählten Personen einen Führerschein besitzen, beträgt 6,5%.

Der Erwartungswert ist $200 \cdot 0{,}8 = 160$.

$5\% \cdot 160 = 8$. Das gesuchte Intervall ist [152;168].
Die Wahrscheinlichkeit für dieses Intervall beträgt $P(152 \le X \le 168) \approx 86{,}8\%$.

Mit $n = 209$ bzw. $n = 210$ und den entsprechenden Zufallsgrößen ergibt sich $P(X_{209;0,8} > 160) \approx 87{,}57\%$ und $P(X_{210;0,8} > 160) \approx 90{,}04\%$
Es müssten also mindestens 210 Erwachsene ausgewählt werden.
</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Vierfeldertafel:
<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\overline{B}$</th><th>gesamt</th></tr>
<tr><td>A</td><td>2234</td><td>248</td><td>2482</td></tr>
<tr><td>$\overline{A}$</td><td>8870</td><td>2527</td><td>11397</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>11104</td><td>2775</td><td>13879</td></tr>
</table>
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2527}{13879} \approx 0{,}182$. Gut 18 % der Prüflinge waren zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre alt und haben die Prüfung nicht bestanden.

Es gilt $P(B) = \frac{11104}{13879} \approx 0{,}800$ und $P(B \mid A) = \frac{2234}{2482} \approx 0{,}900$.

Damit besteht bei Ereignissen A und B eine Abhängigkeit.
</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>


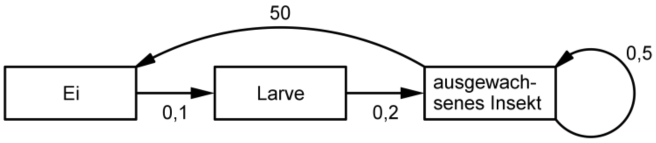
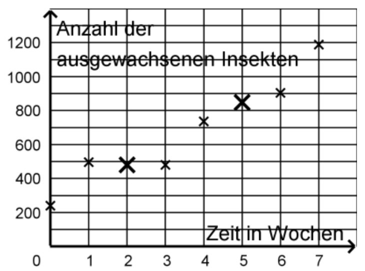
$$q + (1-q) \cdot \frac{q}{2} = \frac{9}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3q}{2} - \frac{q^2}{2} = \frac{9}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 5q^2 - 15q + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{15 \pm \sqrt{45}}{10}$$
Mit $q < 1$ ergibt sich $q \approx 0{,}829$.
</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 24 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>7</td><td>12</td><td>5</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gilt: $\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor und die Vektoren $\overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig und spannen als Richtungsvektoren die Ebene W auf. Es gilt $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0$. Es gilt: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx 35{,}26°$	4	5	
b)	Einzeichnen der Diagonalen im Drachenviereck. Für den Mittelpunkt gilt: $\left(\frac{4+2}{2} \mid \frac{4+2}{2} \mid \frac{-1+(-1)}{2}\right) = (3 \mid 3 \mid -1)$. Der Schnittpunkt von W und u ist J. Setzt man z. B. u in eine Koordinatenform von W ein, so gilt: $4 + r + 4 + r + 2\cdot(-1+r) = 4 \Leftrightarrow 4r = -2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$. Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$, d. h. $J(3{,}5 \mid 3{,}5 \mid -1{,}5)$.	2	2	2
c)	Flächeninhalt des Drachenvierecks EIJK: $\frac{1}{2}\cdot\lvert\overrightarrow{IK}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{EJ}\rvert = \frac{1}{2}\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. Volumen der Pyramide EIJKA: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = 1$. Damit geht $1\,\text{mm}^3$ des Edelsteins verloren.	1	5	

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
d)	Die Aussage ist richtig. Begründung z. B.: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punkts G. Die Ebene, in der das zugehörige Drachenviereck liegt, steht aufgrund der Symmetrie des Körpers senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser steht wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ senkrecht zu den in der Gleichung auftretenden Richtungsvektoren.			3
Verteilung der insgesamt 24 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**12**	**5**

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	 Innerhalb von einer Woche versterben 80% der Larven und entwickeln sich nicht weiter zu ausgewachsenen Insekten. Innerhalb von zwei Woche entwickeln sich nur $0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}02 = 2\%$ der Eier weiter zu ausgewachsenen Insekten.	2	2	
b)	$\vec{v}_5 = A * \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 24000 \\ 2400 \\ 736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36800 \\ 2400 \\ 848 \end{pmatrix}$  Man kann für den vorgegebenen Zeitraum prüfen, ob die Quotienten der Anzahlen der ausgewachsenen Insekten bei Abständen von jeweils drei Wochen konstant sind. $k^4 = 2 \Rightarrow k = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189$. Die Population wächst in jeder Woche um etwa 18,9%. $30000 \cdot 1{,}189^t = 1{,}42 \cdot 30000 \Leftrightarrow 1{,}89^t = 1{,}42 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1{,}42)}{\ln(1{,}189)} \approx 2{,}03$. Die Population wächst etwa alle zwei Wochen um 42%.	5	4	1
c)	$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_1 = B * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 1160 \\ 376 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = B * \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12000 \\ 1160 \\ 376 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18800 \\ 1200 \\ 232 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = B * \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18800 \\ 1200 \\ 232 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	**Bewertung I**	**II**	**III**
	Damit wiederholt sich die Zusammensetzung der Population alle drei Wochen. Durch den Eingriff kann die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten nach oben beschränkt werden. Da es alle drei Zeiteinheiten maximal 376 ausgewachsene Insekten gibt, reicht der Platz im Raum zudem aus.		4	1
d)	Der zweite Eingriff verringert den Anteil der Eier, die in das Larvenstadium übergehen. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ L \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20L \\ 5I-25 \\ 10 \end{pmatrix}$ Für $I<5$ gilt $5I-25<0$. Da die Anzahl der Larven nicht negativ sein kann, können sich Zusammensetzungen mit weniger als fünf ausgewachsenen Insekten nicht ergeben. Alternative Lösungen sind möglich.		2	3
	Verteilung der insgesamt 24 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**7**	**12**	**5**

Schriftliche Abiturprüfung 2019

Grundkurs Mathematik

Freitag, 3. Mai 2019, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $g(x) = 1$ schneidet.

(2 BE)

b) Von allen Tangenten an dem Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Stochastik

Ein Chor besteht aus zwölf Frauen und neun Männern; eine der Frauen leitet den Chor. An einer Preisverleihung dürfen zwei Mitglieder des Chors teilnehmen.

a) Zunächst geht man davon aus, dass die Leiterin des Chors an der Preisverleihung teilnimmt und das zweite Mitglied zufällig ausgewählt wird. Geben Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist.

(1 BE)

Da die Leiterin an der Preisverleihung nicht teilnehmen kann, werden zwei der anderen Mitglieder zufällig ausgewählt.

b) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Frauen ausgewählt werden, größer ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Männer ausgewählt werden .

(1 BE)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden.

(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

In einer Urne befinden sich drei rote und sieben weiße Kugeln.

a) Zweimal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine der entnommenen Kugeln weiß ist.

(2 BE)

b) Zehnmal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen weißen Kugeln. Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass keine der folgenden Abbildungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt.

Abb. 1

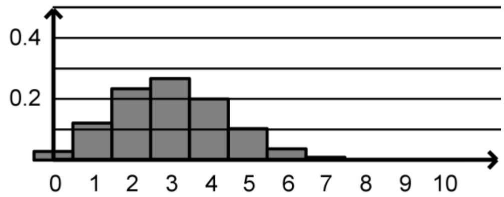
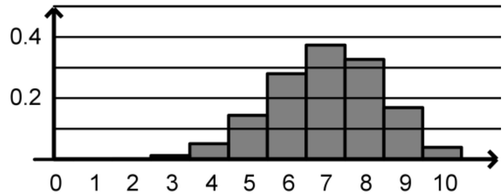


Abb. 2



(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte $B_z(3\,|\,2\,|\,z)$ mit $z \in \mathrm{I\!R}$.

a) Alle Punkte B_z liegen auf einer Geraden g. Erläutern Sie die Lage der Geraden g im Koordinatensystem.

(2 BE)

b) Gegeben wird zusätzlich der Punkt $A(1\,|\,0\,|\,1)$.

Bestimmen Sie diejenigen Werte von z, für die der Abstand zwischen A und B_z gleich 3 ist.

(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Betrachtet wird eine Population von Käfern in ihren unterschiedlichen Entwicklungsstadien.

Zusammensetzungen der Population werden durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ K \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven und K die Anzahl der voll entwickelten Käfer ist.

Die Entwicklung der Population von einem Monat zum nächsten wird durch die Matrix

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben.

a) Geben Sie die Matrix M^2 an.

(1 BE)

b) Es gilt $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{8} \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

Beschreiben Sie in Abhängigkeit von a, wie sich die Population langfristig entwickelt.

(4 BE)

SNR: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2019 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Freitag, 3. Mai 2019, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

TR

Sportler **[Logo: Herz]**

1 Herzfrequenzmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *gleichbleibender* Geschwindigkeit die Herzfrequenz gemessen. Die Abhängigkeit der Herzfrequenz von der Zeit kann modellhaft durch eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$f(t) = 180 - 100 \cdot e^{-0{,}5t}$ für $t \geq 0$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Minuten und $f(t)$ die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute.

a) **Berechnen** Sie die Herzfrequenz des Sportlers zum Startzeitpunkt und nach zwei Minuten nach diesem Modell.

Ermitteln Sie $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ und interpretieren Sie das Ergebnis für eine lange Laufzeit.

(4 BE)

b) **Zeigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = 180t + 200 \cdot e^{-0{,}5t}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie die gesamte Anzahl der Herzschläge des Sportlers in den ersten zehn Minuten.

(3 BE)

c) Ein anderer Sportler startet den Lauf mit einer Herzfrequenz von 70 Herzschlägen pro Minute. Nach 3 Minuten hat er eine Herzfrequenz von 160 Herzschlägen pro Minute erreicht.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben die Parameter a und b einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s der Form $s(t) = 190 - a \cdot e^{b \cdot t}$, die diesen Lauf des Sportlers für $t \geq 0$ modelliert, wobei t die Zeit in Minuten und s(t) die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute ist.

(4 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion k mit $k(x) = 0{,}025x^3 - 0{,}75x^2 + 7{,}2x - 20{,}375$ und $x \in \mathbb{R}$.

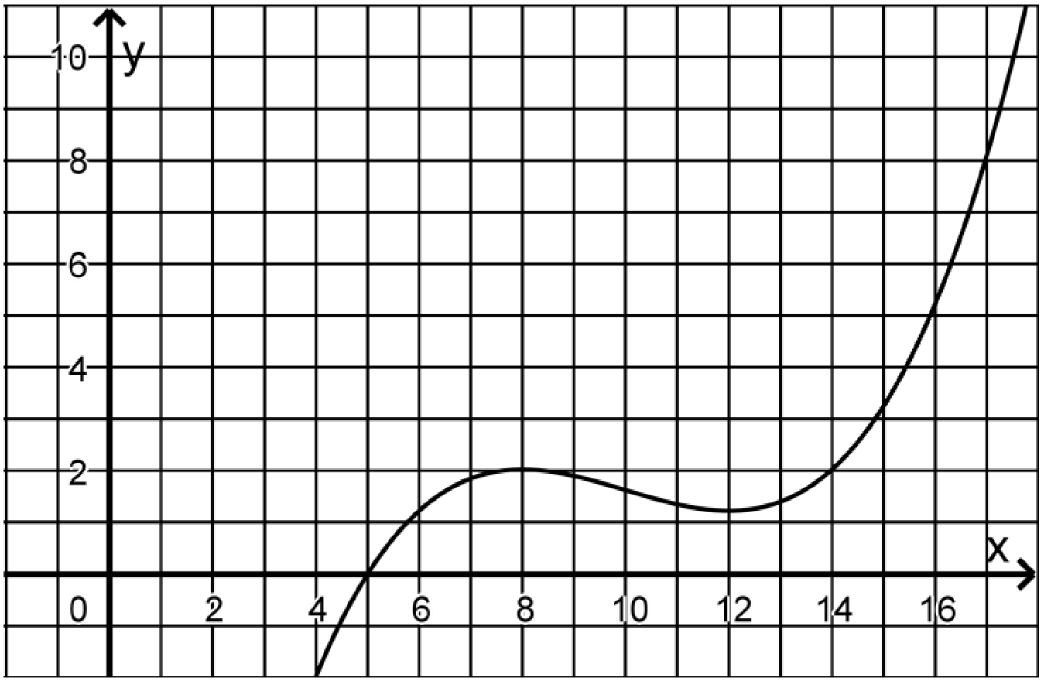


Abbildung 1

2 Laktatmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *ansteigender* Geschwindigkeit jeweils die Konzentration sogenannter Laktate im Blut gemessen. Die Abhängigkeit der Laktatkonzentration von der Geschwindigkeit kann für $8{,}5 \le x \le 17{,}5$ modellhaft durch die Funktion k beschrieben werden. Dabei ist x die Geschwindigkeit des Sportlers in Kilometer pro Stunde und $k(x)$ die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter $\left(\frac{\text{mmol}}{\text{l}}\right)$.

a) **Bestimmen** Sie im Modell mit Hilfe der Abbildung 1 die Geschwindigkeit, ab der die Laktatkonzentration ansteigt, sowie die Geschwindigkeit, bei der die Laktatkonzentration $3{,}25\ \frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ überschreitet.

(2 BE)

b) **Berechnen** Sie die Änderung der Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $11{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Laktatkonzentration nimmt zwischen den Geschwindigkeiten $8{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $12{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ab.

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit die Laktatkonzentration im Modell am stärksten abnimmt.

(6 BE)

3 Geraden durch den Wendepunkt

Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes $W\left(10 \mid \frac{13}{8}\right)$. Betrachtet werden die Geraden, die durch den Wendepunkt W verlaufen.

a) Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = \frac{13}{40}x - \frac{13}{8}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion g durch den Wendepunkt W verläuft.

Zeichnen Sie die Gerade g in die Abbildung 1 ein.

Beschreiben Sie, wie man die Lösungen der Gleichung $k(x) - g(x) = 0$ grafisch ermitteln kann.

Geben Sie diese grafisch ermittelten Lösungen an.

(6 BE)

b) **Begründen** Sie ohne zu rechnen, dass $\frac{1}{15-5} \cdot \int_5^{15} k(x)\,dx = k(10)$ gilt.

(4 BE)

c) Eine Gerade durch W mit negativer Steigung hat mit dem Graphen von k keinen weiteren Punkt gemeinsam.

Ermitteln Sie alle Steigungen, die diese Gerade haben könnte.

(3 BE)

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis **TR**

Luftdruck

1 Innermathematische Betrachtungen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$ und den Wendepunkt $W\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{5}{4}\right)$.

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung von g.

(zur Kontrolle: $g(x) = 5x^3 + 7{,}5x^2$)

Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1{,}5 \le x \le 0{,}5$ in ein Koordinatensystem ein.

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. **Berechnen** Sie die Steigung der Tangente und die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

(11 BE)

b) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x \cdot e^{-2x^2}$.

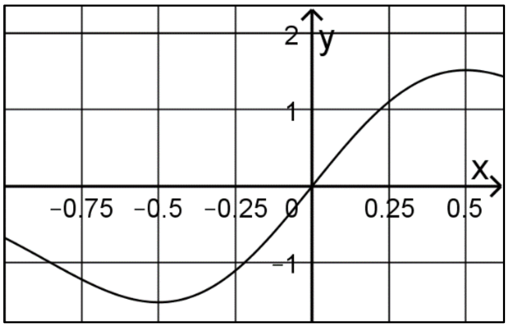


Abbildung 1

Die Funktion h'' mit $h''(x) = \left(80x^3 - 60x\right) \cdot e^{-2x^2}$ ist die zweite Ableitungsfunktion von h.

Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und **beschreiben** Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

Zeigen Sie, dass die Funktion h' mit $h'(x) = \left(5 - 20x^2\right) \cdot e^{-2x^2}$ die erste Ableitungsfunktion von h ist.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von h.

(9 BE)

2 Luftdruck

Der Luftdruck wird in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel modellhaft mithilfe der Funktion p mit $p(x) = 1000e^{-\frac{1}{8}x}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern und $p(x)$ der Luftdruck in Hektopascal (hPa). Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p.

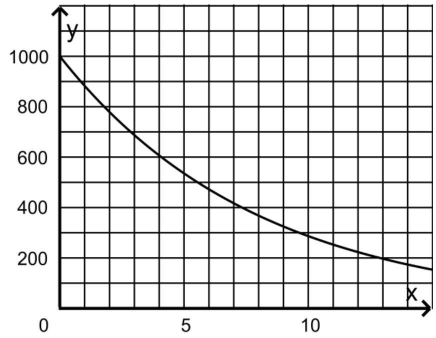


Abbildung 2

a) **Bestimmen** Sie grafisch die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt. **Veranschaulichen** Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 2.

Begründen Sie, dass eine Verringerung des Luftdrucks um die Hälfte auf eine Höhenänderung zurückzuführen ist, die unabhängig von der Ausgangshöhe ist. **Bestimmen** Sie diese Höhenänderung.

Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate des Luftdrucks in einer Höhe von 1,785 km.

(8 BE)

b) Laut einer Faustregel sinkt der Luftdruck um 1 hPa, wenn die Höhe um 0,01 km zunimmt.

Eine Gruppe von Bergsteigern misst in einer Höhe von 1,785 km einen Luftdruck von 800 hPa. Später misst sie einen Luftdruck von 700 hPa.

Beurteilen Sie die Qualität dieser Faustregel. Untersuchen Sie hierfür, ob die prozentuale Abweichung des ungefähren Wertes, den die Faustregel für die Höhe liefert, vom exakten Wert, den die Funktion p liefert, weniger als 5% beträgt.

(4 BE)

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik TR

Führerscheine

In einem Land werden statistische Untersuchungen zum Besitz von Führerscheinen und zu den Führerscheinprüfungen vorgenommen.

a) In diesem Land, in dem 80% der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Erwachsenen an, die einen Führerschein besitzen. Es soll angenommen werden, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist. Sie können zur Lösung die Tabellen im Material verwenden.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Erwachsenen genau 158 Personen den Führerschein besitzen.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Die in der Auswahl vorhandene Anzahl von Erwachsenen mit Führerschein soll um höchstens 5% nach unten und nach oben von der erwarteten Anzahl abweichen. **Bestimmen** Sie dieses Intervall um den Erwartungswert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Intervall.

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mehr als 160 einen Führerschein besitzen.

(9 BE)

b) In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt."

B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden."

Bestimmen Sie die fehlenden Anzahlen in der Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten zu den angegebenen Daten:

Anzahl der Personen zum Ereignis …	B	$\overline{B}$	gesamt
A			
$\overline{A}$			
gesamt			13879

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Prüfling weder A noch B zutrifft, also $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, und **erläutern** Sie diese Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang.

Untersuchen Sie, ob

- die Wahrscheinlichkeit P(B) dafür, dass eine Person die Prüfung besteht und
- die Wahrscheinlichkeit P(B|A) dafür, dass eine Person die Prüfung besteht, die mindestens 30 Jahre ist

übereinstimmen.

Entscheiden Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander abhängen.

(10 BE)

c) Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß wie beim ersten Versuch. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90%.

Berechnen Sie den Wert von q, beispielsweise mit Hilfe eines Baumdiagramms.

(5 BE)

Material – Kumulierte Binomialverteilungen

n=	200
p=	0,8
k	P(X≤k)
151	0,0690
152	0,0944
153	0,1262
154	0,1651
155	0,2113
156	0,2645
157	0,3242
158	0,3892
159	0,4578
160	0,5282
161	0,5981
162	0,6655
163	0,7283
164	0,7849
165	0,8344
166	0,8761
167	0,9101
168	0,9368

n=	201
p=	0,8
k	P(X≤k)
151	0,0533
152	0,0741
153	0,1008
154	0,1340
155	0,1743
156	0,2219
157	0,2764
158	0,3372
159	0,4029
160	0,4719
161	0,5422
162	0,6116
163	0,6780
164	0,7396
165	0,7948
166	0,8427
167	0,8829
168	0,9154

n=	202
p=	0,8
k	P(X≤k)
151	0,0406
152	0,0575
153	0,0794
154	0,1074
155	0,1421
156	0,1839
157	0,2328
158	0,2886
159	0,3503
160	0,4167
161	0,4860
162	0,5561
163	0,6249
164	0,6903
165	0,7506
166	0,8044
167	0,8508
168	0,8894

n=	203
p=	0,8
k	P(X≤k)
151	0,0306
152	0,0440
153	0,0618
154	0,0850
155	0,1144
156	0,1504
157	0,1937
158	0,2440
159	0,3009
160	0,3636
161	0,4305
162	0,5000
163	0,5698
164	0,6380
165	0,7024
166	0,7614
167	0,8137
168	0,8585

n=	204
p=	0,8
k	P(X≤k)
151	0,0228
152	0,0333
153	0,0476
154	0,0665
155	0,0909
156	0,1216
157	0,1591
158	0,2037
159	0,2554
160	0,3135
161	0,3770
162	0,4444
163	0,5139
164	0,5835
165	0,6509
166	0,7142
167	0,7719
168	0,8226

n=	205
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0714
156	0,0970
157	0,1291
158	0,1680
159	0,2140
160	0,2670
161	0,3262
162	0,3905
163	0,4583
164	0,5278
165	0,5969

n=	206
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0554
156	0,0765
157	0,1034
158	0,1369
159	0,1772
160	0,2246
161	0,2788
162	0,3390
163	0,4041
164	0,4722
165	0,5417

n=	207
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0424
156	0,0596
157	0,0819
158	0,1101
159	0,1449
160	0,1867
161	0,2355
162	0,2909
163	0,3520
164	0,4177
165	0,4861

n=	208
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0321
156	0,0459
157	0,0640
158	0,0875
159	0,1171
160	0,1533
161	0,1965
162	0,2466
163	0,3031
164	0,3652
165	0,4314

n=	209
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0240
156	0,0349
157	0,0495
158	0,0687
159	0,0934
160	0,1243
161	0,1619
162	0,2065
163	0,2579
164	0,3155
165	0,3784

n=	210
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0178
156	0,0262
157	0,0378
158	0,0533
159	0,0737
160	0,0996
161	0,1318
162	0,1708
163	0,2168
164	0,2694
165	0,3281

n=	211
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0130
156	0,0195
157	0,0285
158	0,0409
159	0,0574
160	0,0789
161	0,1061
162	0,1396
163	0,1800
164	0,2273
165	0,2811

n=	212
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0094
156	0,0143
157	0,0213
158	0,0310
159	0,0442
160	0,0617
161	0,0843
162	0,1128
163	0,1477
164	0,1895
165	0,2380

n=	213
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0067
156	0,0104
157	0,0157
158	0,0232
159	0,0336
160	0,0477
161	0,0662
162	0,0900
163	0,1198
164	0,1561
165	0,1992

n=	214
p=	0,8
k	P(X≤k)
155	0,0047
156	0,0074
157	0,0114
158	0,0172
159	0,0253
160	0,0364
161	0,0514
162	0,0710
163	0,0960
164	0,1270
165	0,1647

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie **TR**

Edelstein

Die Abbildung 1 in der Anlage stellt einen bearbeiteten Edelstein dar. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Millimeter in der Wirklichkeit. Das Quadrat ABCD mit $A(4\,|\,4\,|\,-1)$ liegt parallel zur x_1,x_2-Ebene und das Quadrat EFGH mit $E(2\,|\,2\,|\,0)$ liegt in x_1,x_2-Ebene. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sowie der Punkt $S(0\,|\,0\,|\,-5)$ liegen auf der x_3-Achse.

Die Abbildung 2 in der Anlage stellt den Edelstein nach einem zusätzlichen Bearbeitungsschritt dar, bei dem ein pyramidenförmiges Stück abgeschliffen wurde. Das Viereck EIJK mit $I(4\,|\,2\,|\,-1)$ und $K(2\,|\,4\,|\,-1)$ ist ein symmetrisches Drachenviereck[1] und liegt in der Ebene W.

a) Die Gerade $u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft durch A.

Zeigen Sie, dass S auf u liegt.

Begründen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$ eine Ebenengleichung in Parameterform der Ebene W darstellt.

Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von der Ebene W ist.

Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebene W mit der Ebene, in der das Quadrat ABCD liegt.

(9 BE)

b) **Zeichnen** Sie die Diagonalen im Drachenviereck EIJK in Abbildung 2 ein.

Berechnen Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{IK}$.

Der Punkt J liegt auf der Geraden u.

Bestimmen Sie die Koordinaten von J.

(zur Kontrolle: $J(3{,}5\,|\,3{,}5\,|\,-1{,}5)$)

(6 BE)

c) **Bestimmen** Sie den Flächeninhalt des Drachenvierecks EIJK.

Der Abstand von Punkt A zu Ebene W beträgt $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Bestimmen Sie das Volumen des Teils des Edelsteins, der durch den zusätzlichen Bearbeitungsschritt verloren ging.

(6 BE)

[1] In einem Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. In einem symmetrischen Drachenviereck ist eine der Diagonalen die Symmetrieachse.

d) In weiteren Bearbeitungsschritten werden auch an den Eckpunkten des Edelsteins, die durch B, C und D dargestellt sind, pyramidenförmige Stücke gleicher Form und Größe abgeschliffen. Anschließend ist der Edelstein symmetrisch bezüglich der Achse, die im Modell durch die x_3-Achse beschrieben wird.

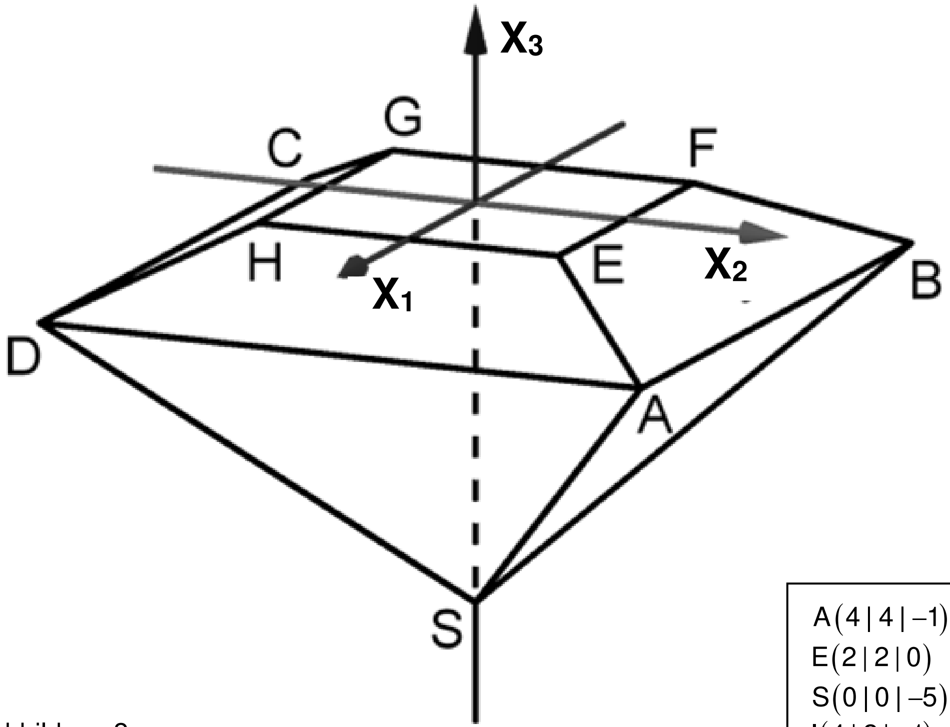
Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Eine der drei Flächen, die durch die weiteren Bearbeitungsschritte entstanden sind, liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

(3 BE)

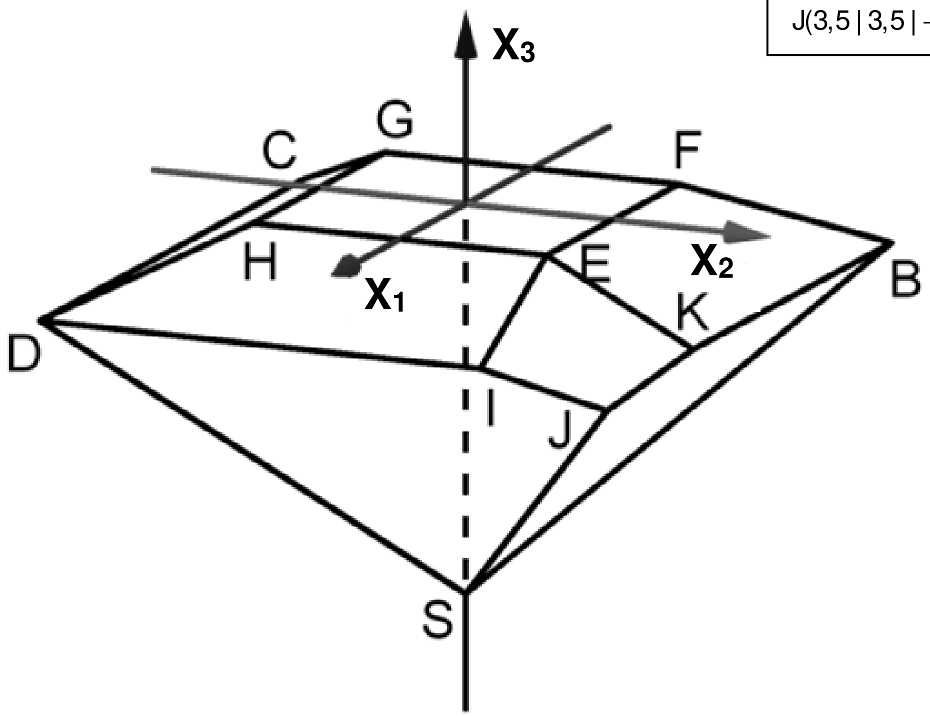
Anlage:

Abbildung 1



$A(4|4|-1)$
$E(2|2|0)$
$S(0|0|-5)$
$I(4|2|-1)$ und $K(2|4|-1)$
$G(-2|-2|0)$
$J(3{,}5|3{,}5|-1{,}5)$

Abbildung 2



Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra TR

Insekten

Bei einer Insektenart sind drei Lebensstadien, die jeweils eine Woche dauern, zu unterscheiden: aus einem Ei entwickelt sich über ein Larvenstadium ein ausgewachsenes Insekt. Die Entwicklung einer Population dieser Art von einer Woche n zur nächsten lässt sich modellhaft durch eine Gleichung beschreiben

$\overrightarrow{v_{n+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Dabei hat der Vektor $\overrightarrow{v_n}$ die Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven und I die Anzahl der ausgewachsenen Insekten angibt.

a) Die Entwicklung der Population soll in einem Übergangsdiagramm dargestellt werden.

Abbildung 1

Zeichnen Sie die fehlenden Pfeile in das Übergangsdiagramm in Abbildung 1 ein.

Erläutern Sie mit Blick auf das Übergangsdiagramm die Bedeutung folgender Rechnung im Sachkontext: 1-0,2=0,8.

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Eier, die sich innerhalb von zwei Wochen zu ausgewachsene Insekten weiter entwickeln.

(4 BE)

b) In einem Raum befinden sich zu Beobachtungsbeginn 11600 Eier, 1880 Larven und 240 ausgewachsene Insekten. Zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 24800 \\ 1200 \\ 480 \end{pmatrix}$ dargestellt, zwei weitere Wochen später durch $\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 24000 \\ 2400 \\ 736 \end{pmatrix}$.

Der Abbildung 2 kann für bestimmte Zeitpunkte nach Beobachtungsbeginn jeweils die Anzahl der ausgewachsenen Insekten entnommen werden.

In der Abbildung fehlen zwei Kreuze. **Ermitteln** Sie, wie sich die Population zu diesen Zeitpunkten auf die drei Entwicklungsstadien verteilt und **zeichnen** Sie die zwei fehlenden Kreuze ein.

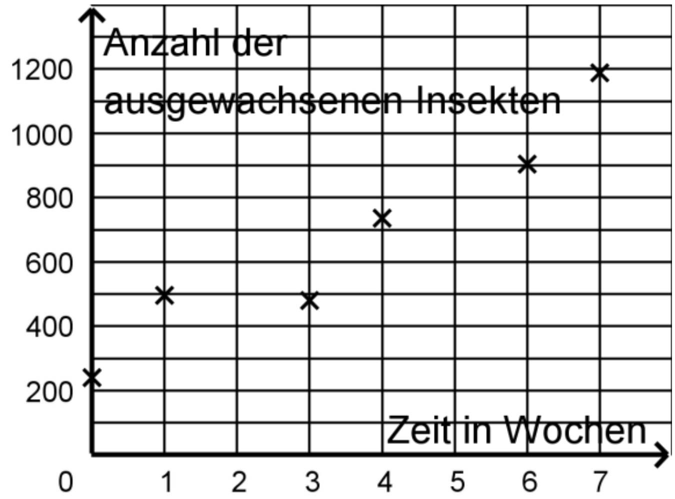


Abbildung 2

Beschreiben Sie, wie man im Modell für einen vorgegebenen Zeitraum prüfen kann, ob sich die Anzahl der ausgewachsenen Insekten in Abständen von jeweils drei Wochen exponentiell entwickelt.

Tatsächlich wächst die Population langfristig stabil. Es wird angenommen, dass sie sich dann alle vier Wochen verdoppelt. **Bestimmen** Sie den Wachstumsfaktor für die Populationsentwicklung innerhalb von einer Woche.

In dieser Phase gibt es zu einem bestimmten Zeitpunkt etwa 30000 ausgewachsene Insekten.
Untersuchen Sie, wie lange es dauert, bis sich die Anzahl der ausgewachsenen Insekten um 42% vergrößert hat.

(10 BE)

In einem weiteren Raum befindet sich ebenfalls eine Population der beschriebenen Insektenart. Um eine Methode zu finden, deren starkes Wachstum einzuschränken, werden im Modell unabhängig voneinander zwei verschiedene Eingriffe in die Entwicklung einer Population dieser Art betrachtet.

c) Der erste Eingriff würde dazu führen, dass ausschließlich die ausgewachsenen Insekten von einer Woche zur nächsten Woche nicht mehr überleben. Ihre Vermehrungsrate bleibt aber gleich.
Geben Sie eine Matrix B **an**, mit der die Entwicklung der Population modelliert werden kann.

Der Raum bietet lediglich Patz für 380 ausgewachsene Insekten. Zu Beginn besteht die Population aus 11600 Eiern, 1880 Larven und 240 ausgewachsenen Insekten.
Untersuchen Sie, ob die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten langfristig nach oben beschränkt werden kann und ob der Raum für die Population ausreichend Platz bietet.

(5 BE)

d) Der zweite Eingriff würde dazu führen, dass sich die Entwicklung der Population im Modell stattdessen mithilfe der Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ beschreiben ließe.

Interpretieren Sie die Wirkung des zweiten Eingriffs im Sachzusammenhang.

Zeigen Sie, dass sich in der Entwicklung der Population eine Anzahl von 500 Eiern nicht gleichzeitig mit beliebigen Anzahlen von Larven oder ausgewachsenen Insekten ergeben kann.

(5 BE)