Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2014 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (CAS)

Dienstag, 29. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Bildung und Wissenschaft über die **Hotline (0421 …)** von 7.00 bis 9.30. Die von der Senatorin für Bildung und Wissenschaft vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

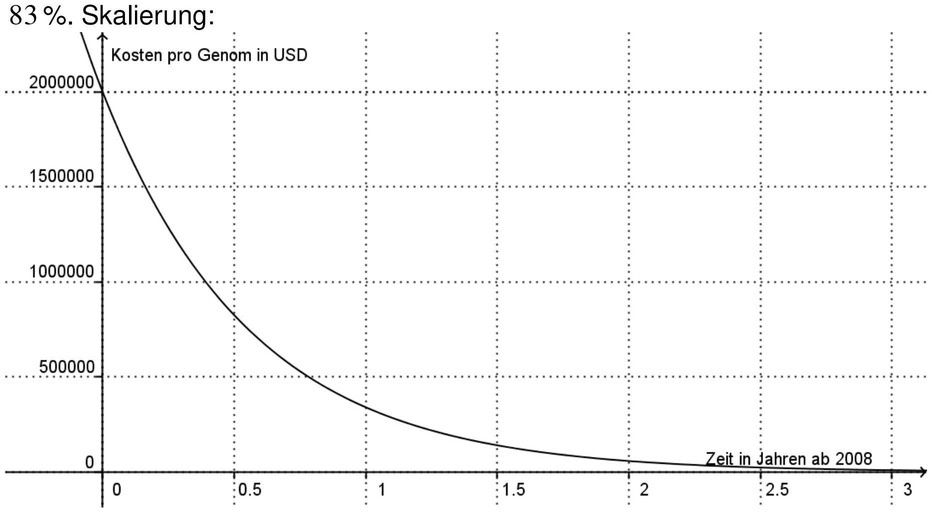
Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungseinheiten	KMK Punkte
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 59,5	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

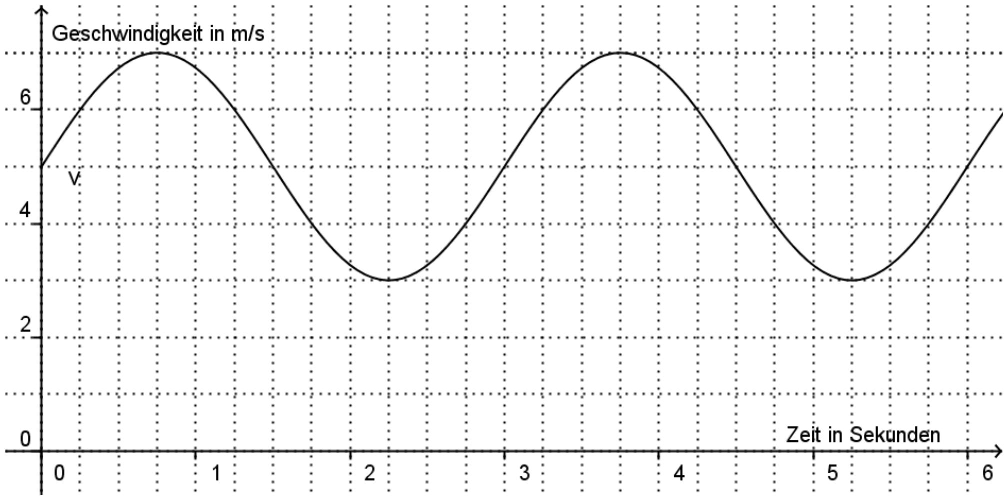
<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Aus $f_1(0) = 2\,700$ folgt $a = 2\,700$.
Aus $f_1(8) = 2$ folgt $k \approx 0{,}9$, also ist insgesamt $f_1(t) = 2\,700 \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Da $f_2(2) \approx 58027$ ist, kostete die Entschlüsselung eines Genoms Anfang 2010 ca. $58\,027$ USD.
Der Wachstumsfaktor ist $b = e^{-1{,}77} \approx 0{,}17$. Mit $b = 1 - \frac{p}{100}$ folgt
$0{,}17 = 1 - \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 83$, also beträgt die jährliche prozentuale Abnahme der Kosten $83\,\%$. Skalierung:

Aus $f_2(t) = 1\,000$ folgt $t \approx 4{,}3$. Dies entspricht vier Jahren und $0{,}3 \cdot 12 = 3{,}6$ Monaten. Im April des Jahres 2012 hat also die Entschlüsselung eines Genoms nur noch $1\,000$ USD gekostet.
$f_2'(t) = -1{,}77 \cdot 2\,000\,000 \cdot e^{-1{,}77t} = -3\,540\,000 \cdot e^{-1{,}77t}$
$f_2'(2) \approx -102\,707$
Der Wert bedeutet, dass die momentane Abnahme der Kosten am Anfang des Jahres 2010 ungefähr $102\,707$ USD pro Jahr betrug.</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$g(-8) \approx 1$
Der Wert bedeutet, dass Anfang 2000 nur ein einziges Genom entschlüsselt war.
Es handelt sich um exponentielles Wachstum. Das Modell prognostiziert also dass die Anzahl an weltweit entschlüsselten Genomen auf lange Sicht unbegrenzt wachsen wird.
Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Integral-Berechnungsbefehls im Funktionsmenü des CAS den Wert des Integrals $I \approx 203$.
Der Wert von I bedeutet, dass im Laufe des Jahres 2010 (bzw. von Anfang 2010 bis Anfang 2011) insgesamt 203 Genome entschlüsselt wurden.</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

d)	Zum Beispiel kann die Produktfunktion k mit $k(t) = f_2(t) \cdot g'(t) = 2\,000\,000\, e^{-1{,}77t} \cdot 49{,}392 \cdot e^{0{,}56t}$ im Funktionsmenü des CAS als neue Funktion eingegeben werden. Mit Hilfe des Integral-Berechnungsbefehls erhält man dann den Wert des Integrals $K \approx 5\,094\,759$ USD. Der gesuchte Ausdruck ist $A = \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 f_2(t) \cdot g'(t)\, dt$.		2	2
Verteilung der insgesamt **25** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Für die Periode P gilt $P = 2\pi \cdot \frac{3}{2\pi} \Leftrightarrow P = 3$. Die Dauer einer vollständigen Ruderbewegung beträgt also drei Sekunden.
Die Geschwindigkeit des Ruderbootes schwankt zwischen drei und sieben Metern pro Sekunde.
Wegen $v(0) = 5$ beträgt die Anfangsgeschwindigkeit fünf Meter pro Sekunde.
Skizze:



Während einer vollständigen Ruderbewegung beträgt die mittlere Geschwindigkeit des Ruderbootes fünf Meter pro Sekunde.
Während einer vollständigen Ruderbewegung legt das Ruderboot $5 \cdot 3 = 15$ Meter zurück.
Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Gleichungslösungs-Befehls im Rechenmenü mit dem Ansatz $v(t) = 4$ die Lösungen $t_1 = 3 \cdot n + 1{,}75$ und $t_2 = 3 \cdot n - 0{,}25$. Da der Wert für t_2 für $n = 0$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt, muss man an dieser Stelle eine Periode ($P = 3$) addieren. Daraus folgt, dass das Ruderboot jeweils nach $t_1 = 1{,}75 + 3n$ und $t_2 = 2{,}75 + 3n$ Sekunden eine Geschwindigkeit von vier Metern pro Sekunde besitzt, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

</td><td>8</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Amplitude beträgt $\frac{4}{3}\pi$, also $a = \frac{4}{3}\pi$. Eine Periode P dauert 3 Sekunden. Mit $b = \frac{2\pi}{P}$ erhält man $b = \frac{2\pi}{3}$. Die Sinuskurve ist um 2,25 in positiver t-Richtung verschoben, also ist $c = 2{,}25$ und damit ist $v'(t) = \frac{4\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot (t - 2{,}25)\right)$.

Mögliche Antworten: Dort, wo der Graph von v steigt, befindet sich der Graph von v' im positiven Bereich. Dort, wo der Graph von v Maxima besitzt, hat der Graph von v' Nullstellen. Dort, wo der Graph von v am stärksten steigt, besitzt der Graph von v' ein Maximum, usw.

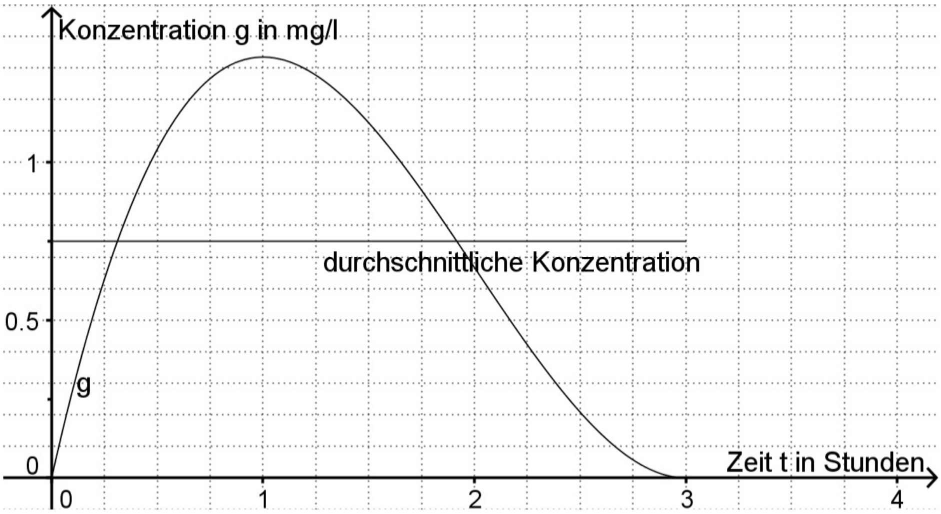
</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Es gilt $V'(t) = \frac{\pi}{1{,}5} \cdot \left(-\frac{3}{\pi} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{1{,}5} \cdot t\right)\right)\right) + 5 \quad = \frac{3}{1{,}5} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1{,}5} \cdot t\right) + 5$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

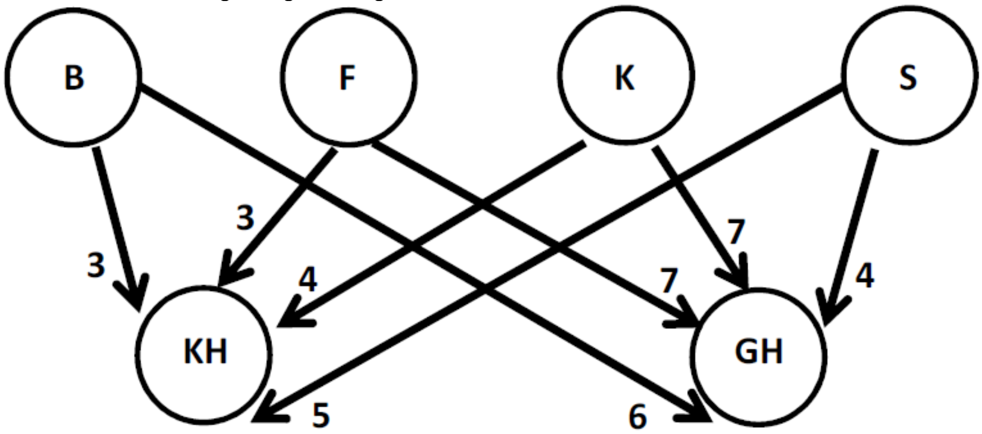
	$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1,5} \cdot t\right) + 5 = v(t)$. Darum ist V eine Stammfunktion von v. Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Integral-Berechnungsbefehls im Funktionsmenü den Wert $\int_0^2 \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1,5} \cdot t\right) + 5\right) dt \approx 11,43$. Das Ruderboot legt innerhalb der ersten zwei Sekunden 11,43 m zurück. Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Gleichungslösungs-Befehls im Rechenmenü mit dem Ansatz $-\frac{3}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x\right) + 5 \cdot x + \frac{3}{\pi} = 10$ die Lösung $x \approx 1,624$. Dieses Ergebnis bedeutet, dass das Ruderboot innerhalb der ersten $1,624$ Sekunden zehn Meter zurücklegt.		6	2
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Aus dem Text ergeben sich die Bedingungen $f(0)=0$, $f(2)=5{,}3$, $f'(2)=0$ und $f(3)=4{,}5$. Mit $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ und $f'(t)=3at^2+2bt+c$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem: $\left\lvert\begin{array}{r} d=0 \\ 8a+4b+2c+d=5{,}3 \\ 12a+4b+c=0 \\ 27a+9b+3c+d=4{,}5 \end{array}\right\rvert$ Durch Lösen des linearen Gleichungssystems erhält man: $a=0{,}175$; $b=-2{,}025$; $c=6$ und $d=0$. Damit ergibt sich $f(t)=0{,}175t^3-2{,}025t^2+6t$.	3	4	
b)	$g(1{,}5)=1{,}125$ $1{,}5$ Stunden nach der Einnahme beträgt die Konzentration $1{,}125\ mg/l$. Der Definitionsbereich ergibt sich über die Nullstellen mithilfe des CAS: $g(t)=0 \Leftrightarrow t_1=0 \vee t_2=3$. Ein sinnvoller Definitionsbereich wäre also $0\le t\le 3$. Mithilfe des CAS ergibt sich: $g(t)=0{,}2 \Leftrightarrow t_1\approx 0{,}07 \vee t_2\approx 2{,}51 \vee t_3\approx 3{,}42$. $t_3\approx 3{,}42$ liegt nicht im sinnvollen Definitionsbereich. Das Medikament wirkt also $0{,}07$ Stunden bis $2{,}51$ Stunden nach der Einnahme. Mit dem CAS ergibt sich: $g'(1{,}5)=-0{,}75$. Die Konzentration des Medikamentes im Blutplasma verringert sich zum Zeitpunkt $1{,}5$ Stunden nach der Einnahme um $0{,}75\ mg/l$ pro Stunde.  	4	4	
c)	Mit der notwendigen Bedingung $g'(t)=0$ ergeben sich die möglichen Extremstellen $t_1=1$ und $t_2=3$. Es gilt $g''(1)=-2<0$. Der Zeitpunkt der maximalen Konzentration ist also eine Stunde nach der Einnahme. Das Medikament ist für den Patienten nicht schädlich und damit geeignet, weil			

	$g(1)=1,\overline{3}<1,5$. Mit $g''(2)=0$ ist die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle $t=2$ erfüllt. Die Prüfung der hinreichenden Bedingung mithilfe von $g'''(t)=2$ liefert $g'''(2)=2\neq 0$. Da $g'(2)=-1<0$, handelt es sich an der Stelle $t=2$ um einen Wendepunkt mit negativer Steigung, also um den Zeitpunkt, in dem der Rückgang der Konzentration am größten ist.	3	2	1
d)	Mit der Stammfunktion G mit $G(t)=\frac{1}{12}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$ ergibt sich $A=\frac{1}{3}\int_0^3 g(t)dt=\frac{1}{3}\left[G(t)\right]_0^3=\frac{1}{3}\left(G(3)-G(0)\right)=\frac{1}{3}\cdot 2,25=0,75$. In dem Zeitraum von Beginn der Einnahme bis drei Stunden nach der Einnahme betrug die durchschnittliche Medikamentenkonzentration im Blut $0,75\ mg/l$. Veranschaulichung s. Skizze in b).		3	1
Verteilung der insgesamt **25** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

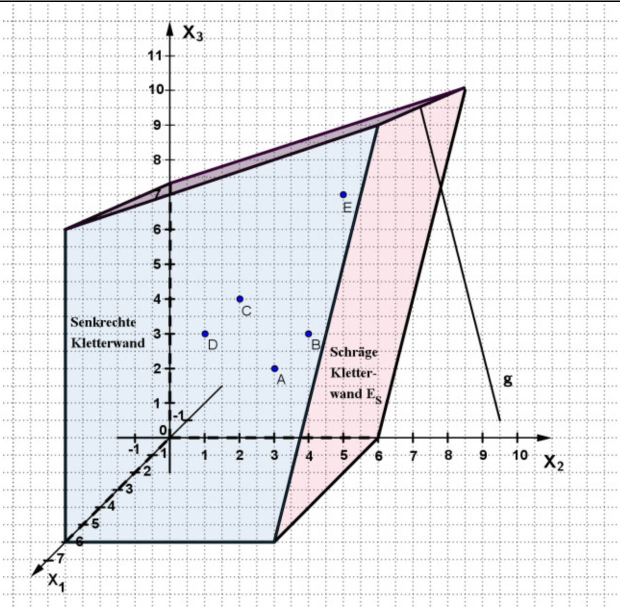
Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Es gilt $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\2&1\end{pmatrix}$ sowie $C=\begin{pmatrix}1&1{,}5&1\\1&2&1\\2&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&7\\4&7\\5&4\end{pmatrix}$,
wobei $c_{32}=2\cdot2+1\cdot2+1\cdot1=7$ beispielsweise bedeutet, dass die Menü-Kombination Großer Hunger sieben ME Käse enthält.</td><td>6</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Für das Verflechtungsdiagramm gilt:


Mit $C*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\37\\k\\s\end{pmatrix}$ ergibt sich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem:
$\left[\begin{matrix}3x+6y=33\\3x+7y=37\\4x+7y=k\\5x+4y=s\end{matrix}\right]\begin{matrix}\cdot(-1)\\ \hookleftarrow+\\ \\ \\ \end{matrix}\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}3x+6y=33\\y=4\\4x+7y=k\\5x+4y=s\end{matrix}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}3x+24=33\\y=4\\4x+28=k\\5x+16=s\end{matrix}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x=3\\y=4\\40=k\\31=s\end{matrix}\right]$
Die Schüler bestellen also drei Menü-Kombinationen der Sorte Kleiner Hunger und vier der Sorte Großer Hunger. Hierfür sind 40 ME Käse und 31 ME Salat nötig.</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\vec{r}*H=(2{,}40\quad 2{,}85\quad 3{,}00)$.
Die Rohstoffkosten für einen Double-Cheese betragen $2{,}40$ €, die für einen Magic-Beef $2{,}85$ € und die für einen Green-Wonder 3 €.
Es gilt $\vec{e}-\vec{z}-\vec{r}*H=(0{,}30\quad 0{,}40\quad 0{,}25)$. Der größte Gewinn wird also mit 40 ct beim Verkauf eines Magic-Beef erzielt.</td><td></td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>



Einzeichnen der Punkte D und E.

Mit Z.B. $\overrightarrow{OD}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{DE}$ als Richtungsvektor ergibt sich mit dem Ansatz $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DE}$ die Geradengleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

welche die Kletterstrecke von D nach E beschreibt.

Die Punktprobe

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist für $r = 0,25$ erfüllt. Also verläuft die Kletterstrecke von D über C nach E entlang der Geraden h.

Z.B. ist zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ kein rechter Winkel, da

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \text{ gilt.}$$

Also ist das Viereck $ABCD$ kein Rechteck.</td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

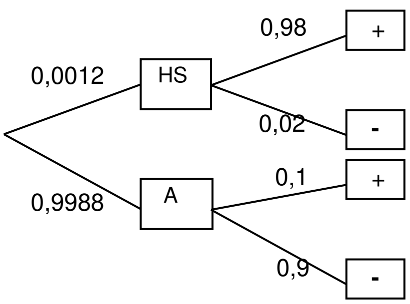
Es gilt: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Mit $r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat das LGS $\begin{bmatrix} -2r + s = 2 \\ r + s = 5 \end{bmatrix}$ die Lösungen

$r = 1$ und $s = 4$.</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

c)	Einzeichnen der Gerade g s. a). Mit $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1,25 \\ 10 \end{pmatrix}$ folgt $t = 1$. Dann gilt $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1,25 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8,75 \\ 11 \end{pmatrix}$ mit $U(3\|8,75\|11)$.	2	1	1
d)	P ist ein Punkt der Ebene E_S, da $-4 \cdot 6 + 0 \cdot x_3 = -24$ gilt. Z.B. sind $Q(0\|0\|-24)$ und $R(1\|6\|0)$ Punkte der Ebene E_S. Dann ergibt sich z.B. mit $E_S : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$ (P, Q und R liegen nicht auf einer Geraden) die Parameterform $E_S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ s,t \in \mathbb{R}$.	1	3	
e)	Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur x_1x_3- Ebene und der Vektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Ebene E_S. Es gilt dann $\cos(\alpha) = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \left\| \dfrac{-4}{\sqrt{17}} \right\| \approx 0,97,\ \alpha \approx 14^\circ$. Somit weicht die schräge Kletterwand um ca. 14° von einer senkrechten Wand ab.	1	2	1
Verteilung der insgesamt **25** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>X: Anzahl der Neugeborenen mit einer beidseitigen Hörstörung, $n=500;\ p=0{,}0012$
X ist binomialverteilt, denn es gibt bei der Untersuchung eines Neugeborenen zwei Möglichkeiten (beidseitige Hörstörung / keine beidseitige Hörstörung) und die Wahrscheinlichkeit, dass das Neugeborene, das untersucht wird, unter einer beidseitigen Hörstörung leidet, bleibt bei jedem Neugeborenen gleich, da die Anzahl der Neugeborenen in der Stichprobe im Vergleich zur Anzahl der Neugeborenen in Deutschland insgesamt klein ist.
$P(X=0)=\binom{500}{0}\cdot 0{,}0012^0\cdot 0{,}9988^{500}\approx 0{,}5486$
$P(X\geq 1)=1-P(X=0)\approx 0{,}4514$</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>+: positiver Befund
-: negativer Befund
HS: Hörstörung
A: ausreichendes Hörvermögen
$P(\textit{bei Kind mit ausreichendem Hörvermögen wird das auch festgestellt})=0{,}9988\cdot 0{,}9=0{,}8989$
$P(\textit{positiverBefund})=p(+)=0{,}0012\cdot 0{,}98+0{,}9988\cdot 0{,}1\approx 0{,}1011$
$P(\textit{Kind mit positivem Befund hat eine Hörstörung})=\dfrac{0{,}0012\cdot 0{,}98}{0{,}0012\cdot 0{,}98+0{,}9988\cdot 0{,}1}\approx 0{,}0116$
$\frac{1}{30}=0{,}0\bar{3};\ \frac{1}{40}=0{,}025$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind mit einem positiven Befund tatsächlich eine Hörstörung hat, ist sogar noch deutlich geringer als in dem Merkblatt für Eltern angegeben.</td><td>5</td><td>7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>X: Anzahl der Neugeborenen mit falschem Messergebnis, $n=100$
Für $p_1=0{,}05$ gilt: $P(X\geq 7)\approx 0{,}234$
Hätte die Firma recht, hätte ein Testergebnis von 7 oder mehr Neugeborenen mit falschem Messergebnis nur etwa 23% Wahrscheinlichkeit.
Für $p_0=0{,}1$ gilt: $P(X\leq 7)\approx 0{,}206$
Hätte die Krankenkasse recht, betrüge die Wahrscheinlichkeit für ein Testergebnis von 7 oder weniger Neugeborenen mit falschem Messergebnis nur etwa 21%.
$p_0=0{,}1$: $P(X\leq 4)\approx 0{,}0237>1\%;\quad P(X\leq 3)\approx 0{,}0078<1\%$
Die Krankenkasse hätte ihre Meinung nur geändert, wenn es höchstens 3 falsche Messergebnisse im Test gegeben hätte.</td><td></td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>**10**</td><td>**13**</td><td>**2**</td></tr>
</table>

Schriftliche Abiturprüfung 2014 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (CAS)

Dienstag, 29. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Genomforschung

[Cartoon DNS-Molekül]

Unter einem Genom versteht man die gesamte Erbinformation eines Lebewesens. Es hat knapp zehn Jahre Forschung gebraucht, bis Anfang 2000 zum ersten Mal das Genom eines einzelnen Menschen entschlüsselt war. Seitdem wird die Entschlüsselung eines Genoms von Jahr zu Jahr immer billiger und die Anzahl der entschlüsselten Genome unterschiedlicher Menschen nimmt weltweit von Jahr zu Jahr zu.

a) Anfang 2000 kostete die Entschlüsselung eines Genoms 2700 Millionen USD (U.S. Dollar), Anfang 2008 waren es nur noch zwei Millionen USD.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der beiden Angaben im Text die Parameter a und k einer Exponentialfunktion f_1 mit $f_1(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$, wobei $f_1(t)$ die Kosten für die Entschlüsselung eines Genoms (in Millionen USD) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2000.

(4 Punkte)

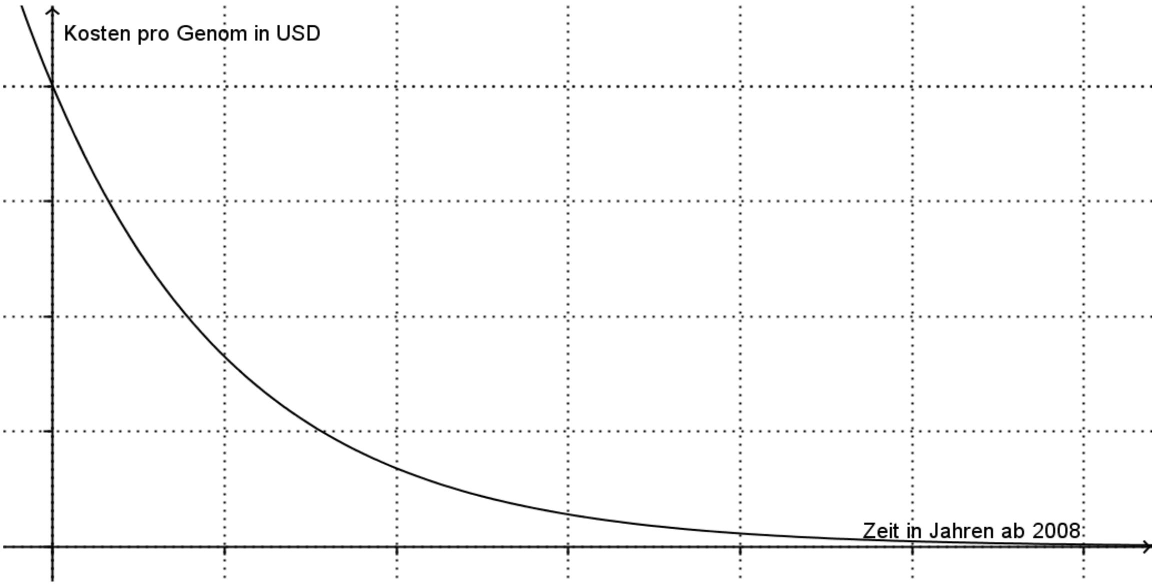
b) Neuere Geräte zur Genom-Entschlüsselung haben die Kostenentwicklung ab 2008 noch einmal stark verändert. Die Kosten können ab 2008 mit der Funktion f_2 mit

$$f_2(t) = 2\,000\,000 \cdot e^{-1{,}77t} \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

modelliert werden, wobei $f_2(t)$ die Kosten für die Entschlüsselung eines Genoms (in USD) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2008.

- Berechnen Sie, wie hoch nach dieser Modellierung die Kosten für die Entschlüsselung eines Genoms Anfang 2010 waren.
- Bestimmen Sie die jährliche prozentuale Abnahme (Zerfallsrate) der Kosten.
- Auf der folgenden Seite ist der Graph zu f_2 dargestellt. Geben Sie passende Werte für die Markierungsstriche der Achsen an.
- In der Vergangenheit war es ein erklärtes Ziel, das „Tausend-Dollar-Genom" zu bekommen. Bestimmen Sie das Jahr und den Monat, in dem die Entschlüsselung eines Genoms nur noch $1\,000$ USD gekostet hat.
- Bestimmen Sie f_2'.
- Berechnen Sie den Wert von $f_2'(2)$.
- Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.

(11 Punkte)



c) In diesem Aufgabenteil geht es nicht mehr um die KOSTEN, sondern um die ANZAHL an entschlüsselten Genomen. Im Jahr 2000 wurde das erste menschliche Genom entschlüsselt. Seitdem wurde das Genom von vielen weiteren Menschen entschlüsselt. Diese Anzahl kann mit der Funktion g mit

$$g(t) = 88{,}2 \cdot e^{0{,}56t} \text{ mit } t \geq -8$$

modelliert werden, wobei $g(t)$ die Anzahl aller entschlüsselten menschlichen Genome in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2008.

- Berechnen Sie den Wert von $g(-8)$.
- Erläutern Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
- Ermitteln Sie, wie sich die Anzahl an weltweit entschlüsselten Genomen nach dieser Modellierung auf lange Sicht entwickeln wird.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_2^3 g'(t)\,dt$.
- Interpretieren Sie die Bedeutung von I im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

d) Im Folgenden geht es um die GESAMTKOSTEN, die nach diesen Modellierungen für die Entschlüsselung von Genomen ausgegeben wurden. Die Gesamtkosten in USD für das Jahr 2010 kann man mit Hilfe des Integrals $K = \int_2^3 f_2(t) \cdot g'(t)\,dt$ ermitteln.

- Bestimmen Sie den Wert von K.
- Ermitteln Sie einen Ausdruck A, mit dem man berechnen kann, wie hoch die durchschnittlichen jährlichen Kosten von Anfang 2008 bis Anfang 2014 waren. (Die Berechnung muss nicht durchgeführt werden!)

(4 Punkte)

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Rudern

[Foto Ruderboot]

Eine vollständige Ruderbewegung besteht aus zwei Phasen: In der ersten Phase tauchen die Ruderer ihre Ruder hinter sich ins Wasser und ziehen diese kräftig durch, dabei wird das Boot beschleunigt. Dann nehmen die Ruderer ihre Ruder aus dem Wasser heraus und führen Sie wieder hinter sich. In dieser Phase wird das Boot langsamer. Durch diese Ruderbewegung schwankt die Geschwindigkeit des Bootes periodisch.

a) Die Geschwindigkeit bei einer Fahrt mit einem Ruderboot kann mit der Funktion v mit

$$v(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right) + 5 \text{ mit } t \geq 0$$

modelliert werden, wobei t die Zeit in Sekunden (s) und $v(t)$ die Geschwindigkeit des Bootes in Metern pro Sekunde (m/s) angibt.

- Berechnen Sie die Dauer einer vollständigen Ruderbewegung.
- Geben Sie den höchsten und den niedrigsten Wert an, zwischen denen die Geschwindigkeit des Ruderbootes schwankt.
- Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Ruderbootes.
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion nach den vorherigen Ergebnissen in das Koordinatensystem im Anhang 1.
- Geben Sie die mittlere Geschwindigkeit des Ruderbootes während einer vollständigen Ruderbewegung an.
- Berechnen Sie, wie viele Meter das Ruderboot während einer vollständigen Ruderbewegung zurücklegt. (Die Berechnung eines Integrals ist hierfür nicht notwendig.)
- Bestimmen Sie alle Zeitpunkte $t \geq 0$, zu denen das Ruderboot eine Geschwindigkeit von vier Metern pro Sekunde besitzt.

(11 Punkte)

b) Die erste Ableitung der Funktion v ist die Beschleunigung des Ruderbootes, d.h. sie gibt an, wie schnell seine Geschwindigkeit ansteigt oder sinkt.

Im Anhang 2 ist der Graph der Funktion v' mit $v'(t) = a \cdot \sin(b \cdot (t - c))$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ dargestellt.

- Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c der Funktion v' und damit den Funktionsterm von v', indem Sie die entsprechenden Werte der angegebenen Punkte verwenden.
- Beschreiben Sie zwei mathematische Zusammenhänge zwischen dem Graph von v und dem Graph seiner Ableitungsfunktion v'.

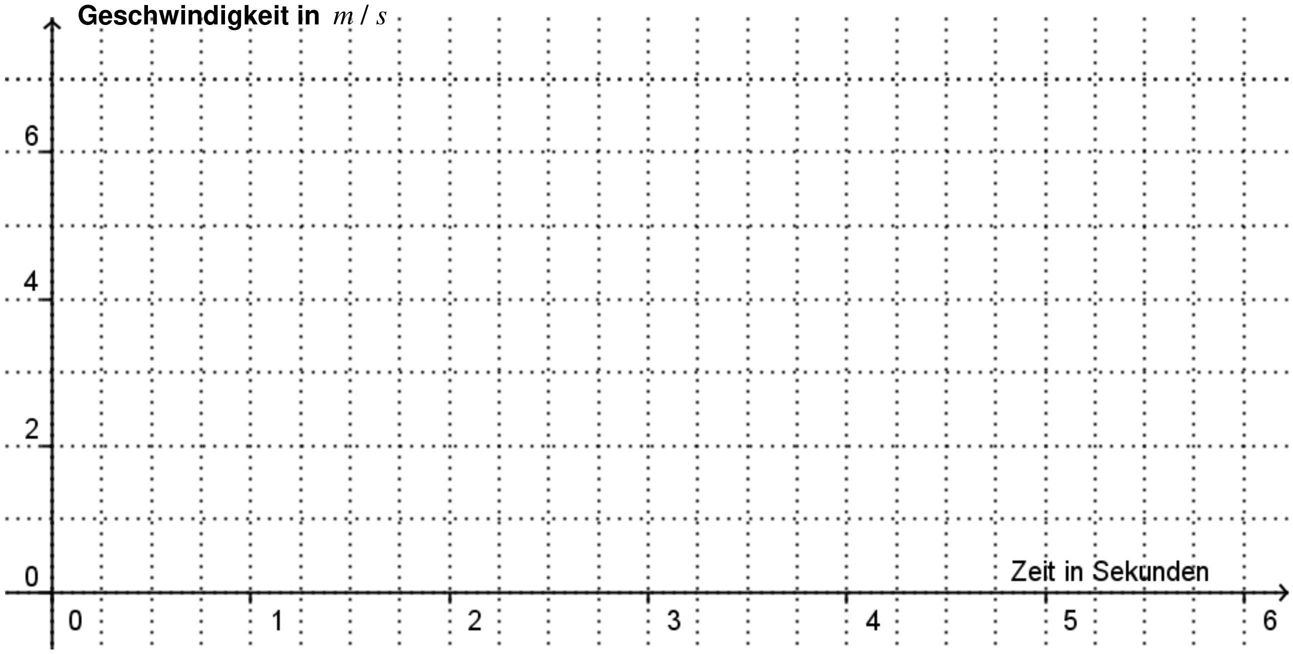
(6 Punkte)

c) Im Folgenden sollen Integrale der Funktion v untersucht werden.

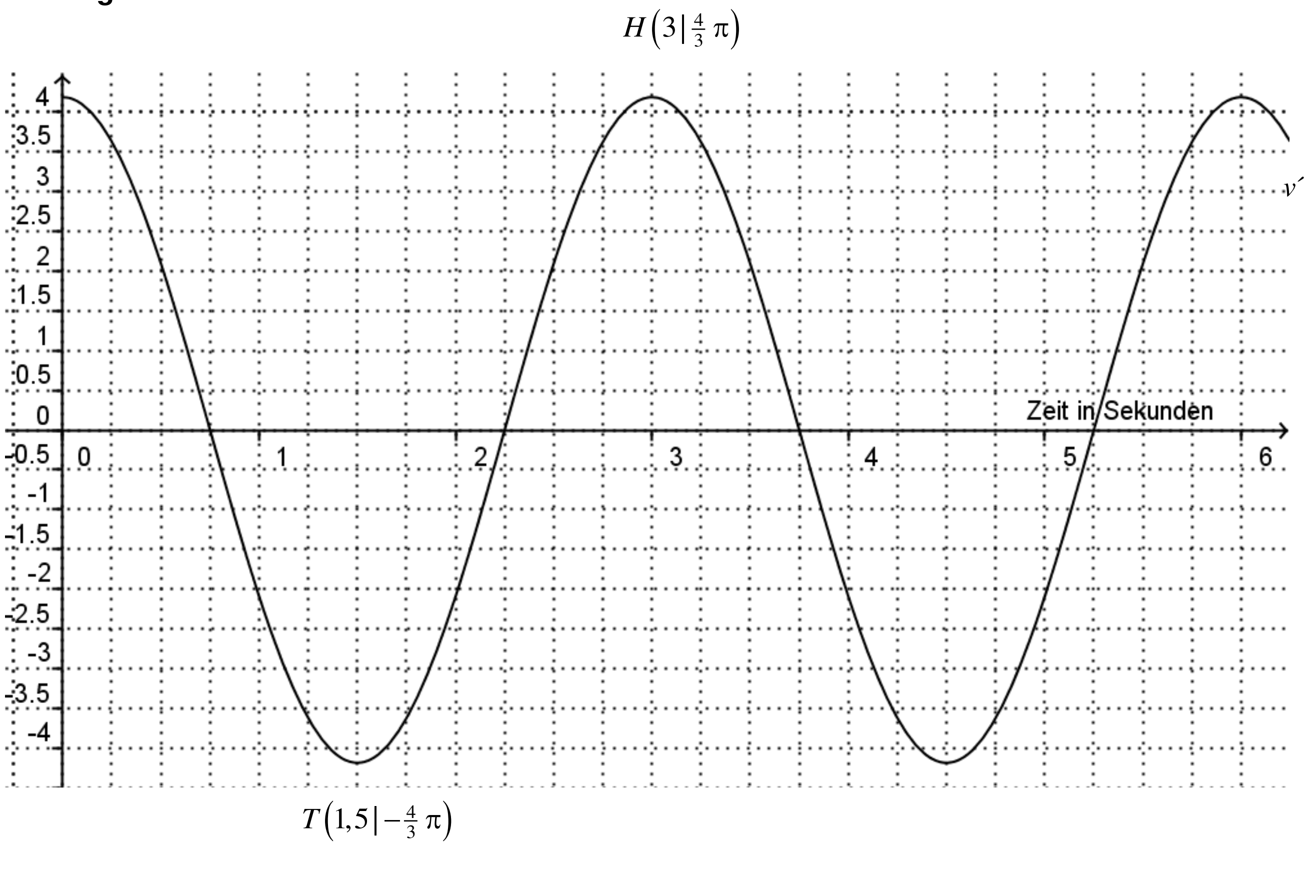
- Zeigen Sie, dass V mit $V(t) = -\frac{3}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right) + 5 \cdot t$ eine Stammfunktion von v ist.
- Bestimmen Sie, welche Strecke das Ruderboot innerhalb der ersten zwei Sekunden zurücklegt.
- Ermitteln Sie einen Wert für x, der die Gleichung $V(x) - V(0) = 10$ erfüllt.
- Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(8 Punkte)

Anhang 1


Geschwindigkeit in m/s
0
2
4
6
Zeit in Sekunden
0
1
2
3
4
5
6

Anhang 2


$H\left(3\,|\,\frac{4}{3}\pi\right)$
$T\left(1{,}5\,|\,-\frac{4}{3}\pi\right)$
v'
Zeit in Sekunden
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
0
1
2
3
4
5
6

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Medikamentenkonzentration

Um eine möglichst lange Wirkungsdauer von Medikamenten zu erreichen, werden in der Medizin spezielle Tabletten oder Kapseln genutzt, die den Wirkstoff sehr langsam freisetzen. Bei der Entwicklung eines solchen Medikaments ist es sinnvoll, die Konzentration eines Medikamentes im Blutplasma (Blutflüssigkeit) zu untersuchen.

Die Konzentration des Medikamentes wird dabei in Milligramm pro Liter angegeben (mg/l).

a) Über ein neu entwickeltes Medikament ist bekannt, dass es zu Beginn der Einnahme nicht nachweisbar ist, d.h. die Konzentration im Blutplasma beträgt $0\ mg/l$. Zwei Stunden nach der Einnahme ist die Konzentration mit $5{,}3\ mg/l$ maximal. Drei Stunden nach der Einnahme beträgt die Konzentration im Blut $4{,}5\ mg/l$.

- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, die den dargestellten Sachverhalt beschreibt. t gibt dabei die Zeit in Stunden nach der Einnahme an und $f(t)$ die Konzentration des Medikamentes im Blutplasma in mg/l. Eine anschließende Überprüfung, ob die bestimmte Funktion f die obigen Angaben erfüllt, ist nicht notwendig.

(7 Punkte)

Bei einem anderen Medikament lässt sich die Konzentration des Medikamentes im Blutplasma in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe von

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

beschreiben, wobei $g(t)$ die Medikamentenkonzentration in mg/l und t die Zeit in Stunden nach der Einnahme angibt.

b)

- Berechnen Sie die Medikamentenkonzentration $1{,}5$ Stunden nach der Einnahme.

Die Funktionsgleichung $g(t)$ ist eine sinnvolle Modellierung bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

- Bestimmen Sie rechnerisch einen sinnvollen Definitionsbereich für g.
- Das Medikament wirkt, wenn die Konzentration mindestens $0{,}2\ mg/l$ beträgt. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament nach der Einnahme wirkt.
- Bestimmen Sie $g'(1{,}5)$.
- Erläutern Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g für $0 \le t \le 3$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

(8 Punkte)

c) Für die Verabreichung des Medikamentes ist es wichtig, dass eine Konzentration im Blut von $1{,}5\ mg/l$ nicht überschritten wird, da dies schädlich für die Patienten ist.

- Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Konzentration des Medikamentes.
- Begründen Sie, dass das Medikament für die Patienten geeignet ist.
- Zeigen Sie, dass der Rückgang der Konzentration zwei Stunden nach der Einnahme am größten ist.

(6 Punkte)

d)

- Bestimmen Sie unter Angabe einer Stammfunktion $A = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} g(t)\ dt$.
- Geben Sie die Bedeutung von A im Sachzusammenhang an.
- Veranschaulichen Sie A in dem von Ihnen angefertigten Koordinatensystem aus Aufgabenteil b).

(4 Punkte)

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra **CAS**

Fast Food

[Grafik Hamburger]

In einem Fast-Food-Restaurant werden Softdrinks, Hamburger und Pommes Frites verkauft.

Im Restaurant werden aus den vier Rohstoffen
1) *Brötchen*
2) *Fleisch*
3) *Käse*
4) *Salat*

die drei verschiedenen Sorten Hamburger
1) *Double-Cheese*
2) *Magic-Beef*
3) *Green-Wonder*

zubereitet.

Die Hamburger lassen sich in zwei Menü-Kombinationen bestellen: Die Kombination
1) *Kleiner Hunger* enthält einen *Double-Cheese* und zwei *Green-Wonder*,

während die Zusammenstellung
2) *Großer Hunger* aus zwei *Double-Cheese*, zwei *Magic-Beef* und einem *Green-Wonder*

besteht.

Bitte behalten Sie die Reihenfolge der verschiedenen Waren stets bei.

Die Prozessmatrix H informiert darüber, wie sich die drei verschiedenen Hamburgersorten aus den vier Rohstoffen in Mengeneinheiten (ME) zusammensetzen.

Es gilt $H = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, wobei die Reihenfolge der Waren den oben eingeführten Nummerierungen folgt.

a) Im Folgenden sollen Sie weitere Prozessmatrizen berechnen.

- Geben Sie die Prozessmatrix M an, die darüber informiert, wie sich die zwei Menü-Kombinationen aus den drei Hamburgersorten zusammensetzen.
- Berechnen Sie die Prozessmatrix C mit $C = H * M$.
- Geben Sie für ein beliebiges Matrixelement von C den Rechenweg an.
- Erläutern Sie die Bedeutung des gewählten Matrixelements im Sachzusammenhang.

(8 Punkte)

b) Arbeiten Sie nun mit der Prozessmatrix $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ weiter.

- Erstellen Sie mit Hilfe von C ein Verflechtungsdiagramm, das zeigt, wie sich die beiden Menükombinationen aus den vier Rohstoffen zusammensetzen.

In der Pause bestellt ein Mathematik-Grundkurs einer nahe dem Fast-Food-Restaurant gelegenen Gymnasialen Oberstufe Menü-Kombinationen der Sorte *Kleiner Hunger* und der Sorte *Großer Hunger*. Hierfür werden 33 ME Brötchen und 37 ME Fleisch verarbeitet.

- Berechnen Sie mit Hilfe von Matrix-Vektoroperationen, wie viele Menükombinationen der beiden Sorten die Schüler bestellen und wie viele ME Käse und ME Salat für die Zubereitung nötig sind.

(10 Punkte)

c) Die folgenden Zeilenvektoren[1] informieren jeweils in Euro über die Kosten je ME Rohstoff $\vec{r}$ sowie über Kosten für die Zubereitung je Hamburgersorte $\vec{z}$ und die Einnahmen je Hamburgersorte $\vec{e}$:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 1{,}00 & 0{,}10 & 0{,}70 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}90 & 0{,}70 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{e} = \begin{pmatrix} 3{,}70 & 4{,}15 & 3{,}95 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $\vec{r} * H$.
- Erläutern Sie, welche Bedeutung die drei Elemente des Ergebnisvektors im Sachkontext haben.
- Untersuchen Sie mit Hilfe von Matrix-Vektoroperationen, mit welcher Hamburgersorte das Fast-Food-Restaurant den größten Gewinn erzielt.

(7 Punkte)

[1] Hierbei handelt es sich um 1x3- und um 1x4-Matrizen.

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

CAS

Kletterturm

[Foto Kletterturm]

Bei einem Kletterturm kann man, abgesichert von Seilen und mit Hilfe von Griffen, an senkrechten und schrägen Kletterwänden verschiedene Kletterstrecken bewältigen. Die Griffe können durch Punkte und die Kletterstrecken durch Vektoren beschrieben werden. Das Seil zum Sichern der Kletterer kann als Ausschnitt einer Geraden und die Kletterwände als Ausschnitte von Ebenen beschrieben werden. Das vereinfachte Modell eines Kletterturms setzt sich u.a.aus einer schrägen und drei senkrechten Kletterwänden zusammen (vgl. Abb.1).

Die x_1x_2 - Ebene beschreibt den Erdboden und die x_3 - Achse zeigt senkrecht in Richtung Himmel.

Die Koordinateneinheit ist ein Meter.

In der vorderen senkrechten Kletterwand werden fünf Griffe durch die Punkte $A(6|6|5)$, $B(6|7|6)$, $C(6|5|7)$, $D(6|4|6)$ und $E(6|8|10)$ beschrieben.

a) Im folgenden Aufgabenteil wird die Lage der Griffe untersucht:

- Zeichnen Sie die Punkte D und E in das Koordinatensystem in Abb.1 ein. (Dort sind schon die Punkte A, B und C eingetragen).

Eine Kletterstrecke von D nach E verläuft entlang einer Geraden h.

- Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, entlang derer diese Kletterstrecke verläuft.
- Überprüfen Sie, ob der Punkt C auf der Geraden h liegt.

Die Griffe A, B, C und D sind die Eckpunkte des Vierecks $ABCD$.

- Untersuchen Sie, ob Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

(8 Punkte)

b) Eine Kletterstrecke z.B. von B nach E kann durch den Vektor $\overrightarrow{BE}$ beschrieben werden. Im folgenden Aufgabenteil soll jeweils ein Vektor durch andere Vektoren beschrieben werden:

- Beschreiben Sie mit einer Gleichung den Vektor $\overrightarrow{AC}$ durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.
- Beschreiben Sie mit einer Gleichung den Vektor $\overrightarrow{BC}$ durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Eine andere Kletterstrecke von A nach E wird durch die Gleichung $r \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$ beschrieben.

- Bestimmen Sie rechnerisch $r, s \in \mathbb{R}$ so, dass diese Gleichung gilt.

(5 Punkte)

c) Ein Kletterer klettert an der schrägen Kletterwand und wird über einen Umlenkhaken mit einem Seil von einem Sichernden gesichert (vgl. Abb.2).

Der Verlauf des Seils kann dann durch den Ausschnitt der Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1,25 \\ 10 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$ beschrieben werden.

- Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem in Abb.1 ein.

Das Seil g verläuft durch den Umlenkhaken U, der sich in einer Höhe von 11 Metern befindet.

- Bestimmen Sie die Koordinaten von U.

(4 Punkte)

Die schräge Kletterwand wird durch $E_S: -4x_2 + x_3 = -24$ beschrieben.

d)

- Zeigen Sie, dass der Punkt $P(0|6|0)$ in der Ebene E_S liegt.
- Geben Sie zwei weitere Punkte der Ebene E_S an.
- Bestimmen Sie von E_S eine Ebengleichung in Parameterform.

(4 Punkte)

e) Die schräge Kletterwand E_S ist im Vergleich zu einer senkrechten Wand, welche parallel zur x_1x_3- Ebene verläuft, geneigt.

Berechnen Sie den Winkel, um den die schräge Kletterwand von solch einer senkrechten Wand abweicht.

(4 Punkte)

Material zur Aufgabe Kletterturm

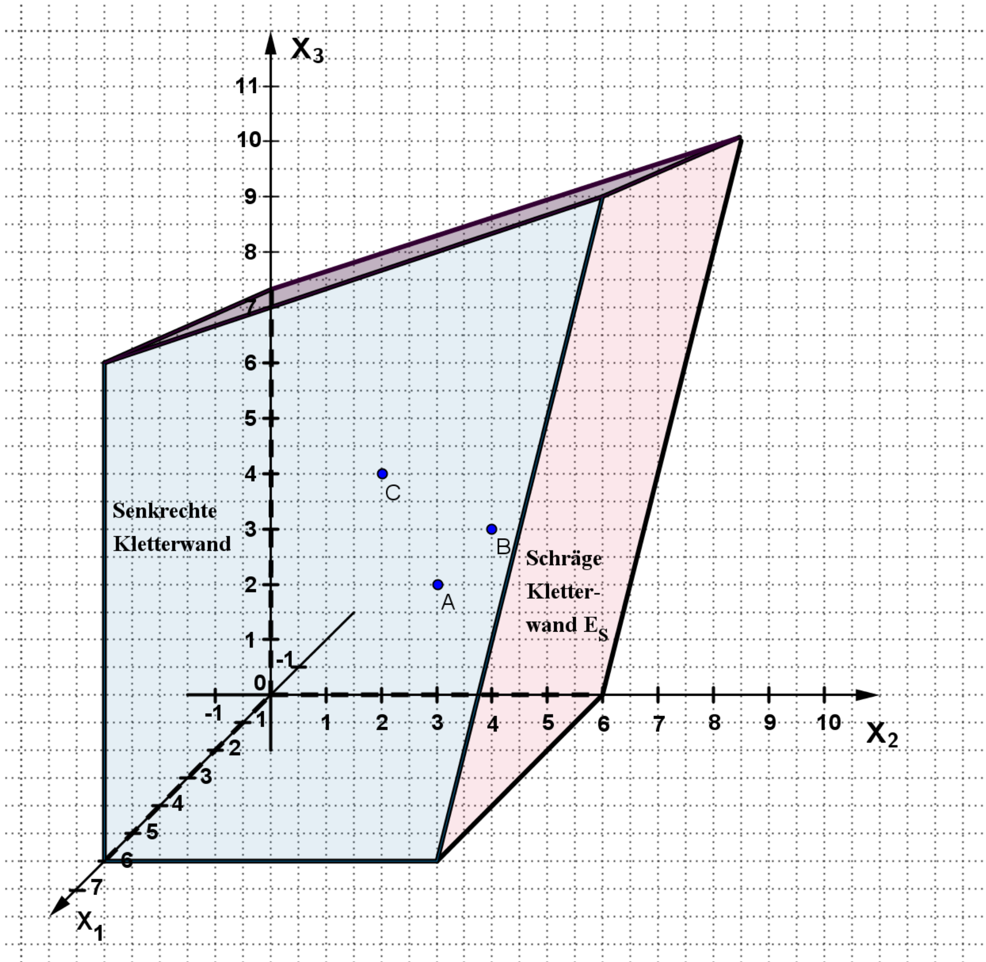


Abb1.

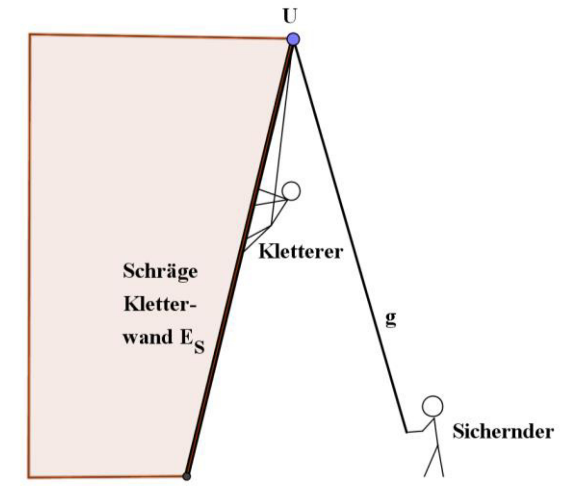


Abb.2

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik **CAS**

Hörscreening für Neugeborene

In Deutschland geht man aufgrund von Studien davon aus, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}0012$ ein Kind mit einer beidseitigen Hörstörung geboren wird (im Folgenden kurz: „Hörstörung"). Solche Störungen können insbesondere die Sprachentwicklung negativ beeinflusssen. Um sie früh zu erkennen, gibt es eine Untersuchung für Neugeborene.

a) Es werden 500 Neugeborene auf Hörstörungen hin untersucht.

- Erläutern Sie, warum man diese 500 Untersuchungen als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann. Geben Sie dabei eine geeignete Zufallsgröße an.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit keines der 500 Neugeborenen eine Hörstörung hat.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens eines der 500 Neugeborenen eine Hörstörung hat.

(6 Punkte)

Die Messergebnisse bei der Untersuchung der Neugeborenen können jedoch auf zwei unterschiedliche Weisen fehlerhaft sein:

– Bei einem Kind liegt eine Hörstörung vor und trotzdem zeigt der Test an, dass das Kind ein ausreichendes Hörvermögen hat.

– Ein Kind hat ausreichendes Hörvermögen und trotzdem zeigt der Test an, dass das Kind eine Hörstörung hat.

Die Qualität des zur Zeit angewendeten Verfahrens lässt sich durch folgende Wahrscheinlichkeiten beschreiben:

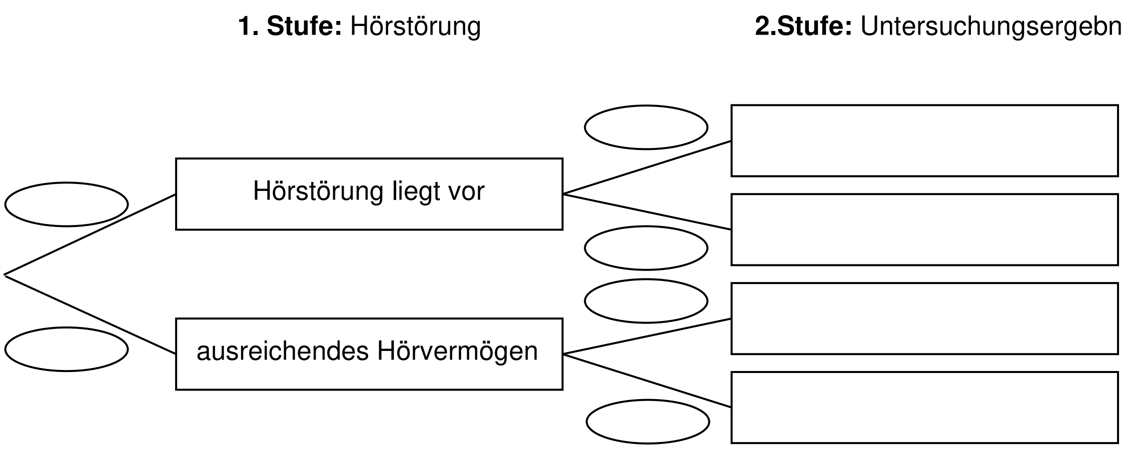
– Hat ein Kind ein ausreichendes Hörvermögen, so stellt dies die Untersuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% auch fest.

– Hat ein Kind eine Hörstörung, so stellt dies die Untersuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% fest.

Geben Sie im Folgenden die Ergebnisse auf vier Nachkommastellen genau an.

b) Die Qualität des Verfahrens wird im Folgenden genauer untersucht.

- Stellen Sie in einem zweistufigen Baumdiagramm mit Pfadwahrscheinlichkeiten dar, wie Untersuchungsergebnisse, die eine Hörstörung oder ein ausreichendes Hörvermögen anzeigen, zu Stande kommen können. Vervollständigen Sie dazu das folgende Baumdiagramm:



- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausreichendes Hörvermögen vorliegt und die Untersuchung dies auch feststellt.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Untersuchung eine Hörstörung anzeigt. (Zur Kontrolle: $P(\textit{Untersuchung zeigt Hörstörung an}) = 0{,}1011$)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind mit einem Untersuchungsergebnis „Hörstörung" tatsächlich eine Hörstörung hat[1].
- In einem Merkblatt für die Eltern steht: *„Nur ungefähr ein Kind von 30 bis 40 im Screening auffälligen Kindern hat tatsächlich eine Hörstörung."[2].* Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit diesem Text.

(13 Punkte)

Ein Messergebnis, das eine Hörstörung anzeigt, obwohl keine Hörstörung vorliegt, kann zum Beispiel durch Hintergrundgeräusche, Flüssigkeit im Ohr oder Unruhe des Kindes entstehen.

Eine Firma behauptet, ein verbessertes Messverfahren entwickelt zu haben, das bei weniger Kindern mit ausreichendem Hörvermögen ein falsches Messergebnis liefert.

Die Firma testet ihr Messverfahren an 100 Neugeborenen ohne Hörstörung. Im Test tritt bei 7 von diesen Neugeborenen ein falsches Messergebnis auf.

Nutzen Sie für die folgenden Berechnungen Ihren Rechner oder die Tabelle in der Anlage.

c) Die Firmenleitung geht davon aus, dass das Verfahren besser ist und die Wahrscheinlichkeit für ein falsches Messergebnis nur noch 5% beträgt.

- Berechnen Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass trotzdem bei 7 oder mehr der 100 Neugeborenen ein falsches Messergebnis geliefert wird.

Eine Krankenkasse möchte die neuen Messgeräte nicht bezahlen. Sie geht davon aus, dass das Verfahren der Firma nicht besser ist. Sie ist überzeugt, dass die Wahrscheinlichkeit für ein falsches Messergebnis immer noch 10% beträgt.

- Berechnen Sie mit dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 7 oder weniger der 100 Neugeborenen ein falsches Messergebnis geliefert wird.
- Die Krankenkasse würde ihre Meinung nur ändern, wenn die Testergebnisse mit ihrer Annahme von $p = 0{,}1$ sehr unwahrscheinlich wären, nämlich ihre Wahrscheinlichkeit unter 1% läge.

  Bestimmen Sie, wie oft ein falsches Messergebnis bei dem Test mit 100 Neugeborenen dann höchstens hätte auftreten dürfen.

(6 Punkte)

---

[1] Bei Kindern mit dem Untersuchungsergebnis „Hörstörung" werden weitere, aufwändigere Untersuchungen durchgeführt.

[2] Quelle: Merkblatt für Eltern, Gemeinsamer Bundesausschuss (G –BA)

Kumulierte Binomialverteilung, $n = 100$

k	p = 0,1	p = 0,05
0	0,000	0,006
1	0,000	0,037
2	0,002	0,118
3	0,008	0,258
4	0,024	0,436
5	0,058	0,616
6	0,117	0,766
7	0,206	0,872
8	0,321	0,937
9	0,451	0,972
10	0,583	0,989
11	0,703	0,996
12	0,802	0,999
13	0,876	1,000
14	0,927	1,000
15	0,960	1,000
16	0,979	1,000
17	0,990	1,000
18	0,995	1,000
19	0,998	1,000
20	0,999	1,000
21	1,000	1,000
22	1,000	1,000
23	1,000	1,000
24	1,000	1,000
25	1,000	1,000