Schriftliche Abiturprüfung 2016

Leistungskurs Mathematik (CAS)

Freitag, 29. April 2016, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421 …)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien" Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 225 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien" Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Im Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.
- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur

Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).

- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

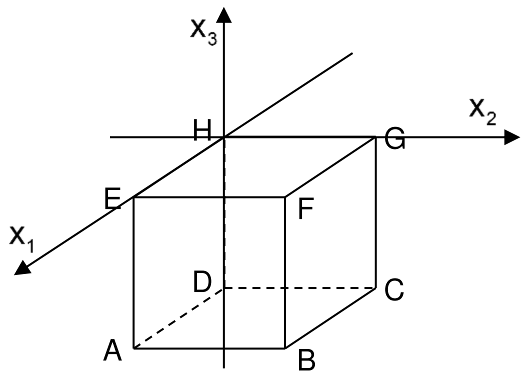
Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 1				
a)	Grafische Ermittlung der Fläche ergibt $\int_3^5 f(x)\,dx \approx 2{,}3$.	1	1	
b)	Wegen $F'(x) = f(x)$ erhält man durch Ablesen des Funktionswerts $F'(2) \approx 0{,}5$.		1	
c)	Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt: $\int_3^b f(x)dx = F(b) - F(3) = F(b)$, da $F(3) = 0$ ist.		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**4**	**0**

		I	II	III
Aufgabe 2				
a)	Durch die Faktorisierung lassen sich die Nullstellen $x = 0$ und $x = a$ ablesen.	1		
b)	Mit $f_a(x) = -a \cdot x^2 + a^2 \cdot x$ erhält man $\int_0^a (-a \cdot x^2 + a^2 \cdot x)dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2\right]_0^a = -\frac{1}{3} \cdot a^4 + \frac{1}{2} \cdot a^4 = \frac{1}{6} \cdot a^4$. Aus der Gleichung $\frac{1}{6} \cdot a^4 = \frac{8}{3}$ erhält man als einzige Lösung $a = 2$, da $a > 0$.	1	3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

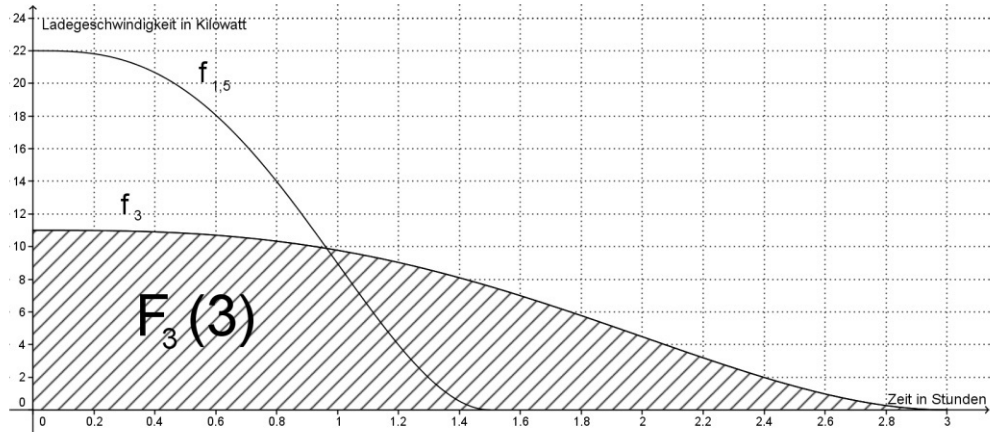
		I	II	III
Aufgabe 3				
a)	Es ist $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 + \binom{2}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}36 + 0{,}48 = 0{,}84$.	1	1	
b)	Es gilt: $P(X \ne 0) + P(X \ne 1) + P(X \ne 2)$ $= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 0) + P(X = 1)$ $= 2 \cdot (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$ $= 2 \cdot 1$ $= 2$		1	2
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**2**	**2**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 4				
a)	Die Koordinatenachsen:  Der Punkt A hat die Koordinaten $A(2\,\vert\,0\,\vert -2)$. Hinweis: Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden.	2		
b)	Setzt man für den Punkt P die Koordinaten $P(2\,\vert\,2\,\vert\,x_3)$ mit $-2 \le x_3 \le 0$ an, so ergibt sich $\vert\overline{HP}\vert = \sqrt{2^2+2^2+x_3^2} = 3$ und daraus $x_3^2 = 1$, d. h. $x_3 = -1$ (die andere Lösung entfällt). Der Punkt P hat somit die Koordinaten $P(2\,\vert\,2\,\vert -1)$.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	**0**

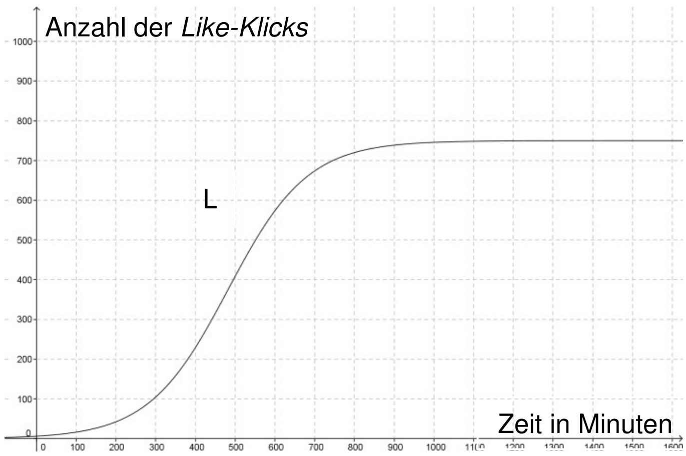
Aufgabe 5				
a)	Die Matrix für zwei Übergänge ist $M*M = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}6\\0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}6\\0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}76 & 0{,}72\\0{,}24 & 0{,}28\end{pmatrix}$.	2		
b)	N liefert im ersten Schritt den Verteilungsvektor $\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix}$. Der Vektor $\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix}$ ist ein Fixvektor der Matrix N, denn es gilt: $N * \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix}$. Damit liefert die Matrix N die dargestellten Anteile im Zustand A.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**3**	**2**	**0**

Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
a)	$g(t) = b\cdot t^4 + c\cdot t^3 + d$, $g'(t) = 4\cdot b\cdot t^3 + 3\cdot c\cdot t^2$ Den Angaben im Text entnimmt man $g(0)=3{,}7$, $g(10)=0$ und $g'(10)=0$ Zu lösen ist das LGS: $\begin{bmatrix} & & d & = 3{,}7 \\ 10000b & +1000c & +d & = 0 \\ 4000b & +300c & & = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b & = 0{,}00111 \\ c & = -0{,}0148 \\ d & = 3{,}7 \end{bmatrix}$ $g(t) = 0{,}00111\cdot t^4 - 0{,}0148\cdot t^3 + 3{,}7$	2	5	
b)	Eine mögliche Lösung: Wegen $f_{1,5}(0) = 22$ und $f_3(0) = 11$ ist der zu Beginn höher gelegene Graph der von $f_{1,5}$. Der Definitionsbereich für $f_{1,5}$ ist $0 \le t \le 1{,}5$ und für f_3 ist er $0 \le t \le 3$, $t \in \mathbb{R}$ Eine Anfangsgeschwindigkeit von 2,3 erreicht man, wenn $\frac{33}{a} = 2{,}3 \Leftrightarrow a = \frac{330}{23} \approx 14{,}35$. Die Ladedauer würde ca. 14,35 Stunden betragen.	2	2	
c)	$f_a'(t) = \frac{396}{a^5}\cdot t^3 - \frac{396}{a^4}\cdot t^2$ und $f_a''(t) = \frac{1188}{a^5}t^2 - \frac{792}{a^4}t$ Aus $f'(a) = \frac{396}{a^5}\cdot a^3 - \frac{396}{a^4}\cdot a^2 = \frac{396}{a^2} - \frac{396}{a^2} = 0$ und $f_a''(a) = \frac{1188}{a^5}\cdot a^2 - \frac{792}{a^4}\cdot a = \frac{1188}{a^3} - \frac{792}{a^3} = \frac{396}{a^3} > 0$ Wegen $a > 0$ folgt, dass die Funktion f_a' an der Stelle a einen Tiefpunkt besitzt. $f_a(a) = \frac{99}{a^5}\cdot a^4 - \frac{132}{a^4}\cdot a^3 + \frac{33}{a} = \frac{99}{a} - \frac{132}{a} + \frac{33}{a} = 0$ also $T(a\mid 0)$. 1) Es gilt $F_a''(a) = 0$ wegen $f_a'(a) = 0$. 2) Es gilt $F_a'''(a) > 0$ wegen $f_a''(a) > 0$. 3) Es gilt $F_a'(a) = 0$ wegen $f_a(a) = 0$. Aus 1) und 2) folgt, dass der Graph von F_a an der Stelle $t = a$ einen Wendepunkt besitzt. Da gleichzeitig wegen 3) die Steigung dort 0 ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.	1	6	5
d)	$F_a'(t) = \frac{99\cdot 5}{5\cdot a^5}\cdot t^4 - \frac{33\cdot 4}{a^4}\cdot t^3 + \frac{33}{a} = \frac{99}{a^5}\cdot t^4 - \frac{132}{a^4}\cdot t^3 + \frac{33}{a} = f_a(t)$ $F_3(t) = \frac{11}{135}\cdot t^5 - \frac{11}{27}\cdot t^4 + 11\cdot t$ und $F_3(3) = 19{,}8$			

Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
 Innerhalb von drei Stunden wurden 19,8 kWh geladen. Der Akku ist voll. $19{,}8 \cdot 0{,}9 = 17{,}82$ Der Ansatz $F_3(t) = 17{,}82$ liefert das Ergebnis $t \approx 1{,}94$ $\int_0^a f_a(t)\,dt = \left[F_a(t)\right]_0^a = F_a(a) - F_a(0) = \frac{99}{5 \cdot a^5} \cdot a^5 - \frac{33}{a^4} \cdot a^4 + \frac{33}{a} \cdot a - 0$ $= \frac{99}{5} - 33 + 33 = 19{,}8$. Unabhängig vom Verlauf der Ladegeschwindigkeit ist am Ende der Ladedauer a der Akku mit 19,8 kWh voll geladen.	1	3	6
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**6**	**16**	**11**

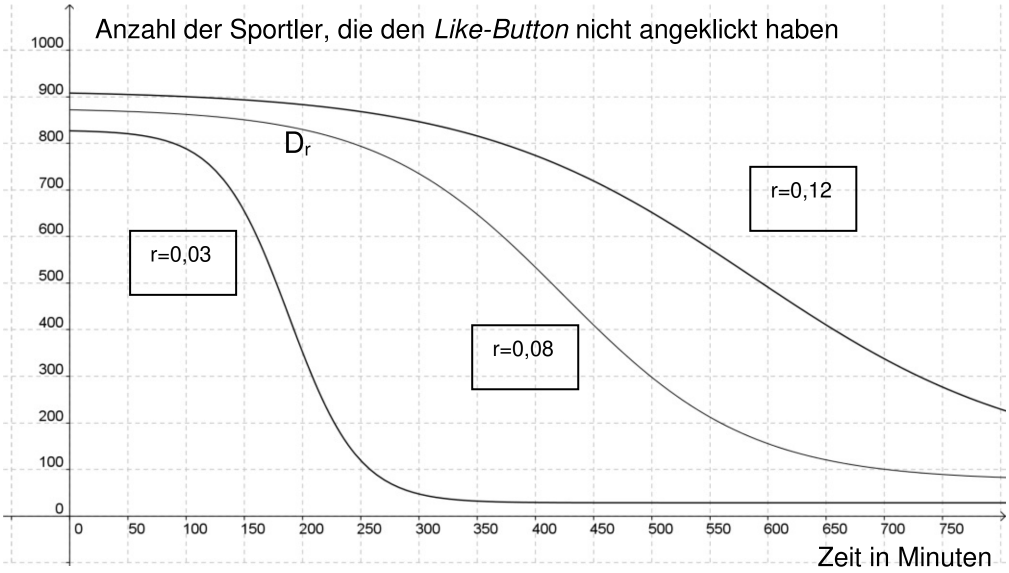
Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	**Bewertung** I	**Bewertung** II	**Bewertung** III
a)	Die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute sinkt im Laufe der Zeit: f(42)=1,8>1,21=f(201). Zur Modellierung der Geschwindigkeit dient daher exponentielle Abnahme, d.h. für a gilt a<1. Mit $f(42)=1{,}8$ und $f(201)=1{,}21$ ergibt sich $c\cdot a^{42}=1{,}8$ und $c\cdot a^{201}=1{,}21$, also $1{,}8\cdot a^{-42}\cdot a^{201}=1{,}21 \Leftrightarrow a^{159}=\frac{1{,}21}{1{,}8} \Leftrightarrow a\approx 0{,}9975$ und $c=1{,}8\cdot 0{,}9975^{42}\approx 2$. Es gilt: $f(t)=2\cdot 0{,}9975^{t}$ ..	2	4	
b)	$F'(t)=0-800\cdot(-0{,}0025)e^{-0{,}0025t}=2\cdot e^{-0{,}0025t}=f(t)$ Zu bestimmen ist der Zeitpunkt z, für den gilt: $\int_0^z f(t)\,dt=F(z)-F(0)=0{,}7\cdot 950$ $\Leftrightarrow 800-800\cdot e^{-0{,}0025z}=665 \Leftrightarrow z\approx 712$. Es dauert etwa 11 Stunden und 52 Minuten, bis 70% aller Sportler den *Like-Button* angeklickt haben.	2	3	
c)	$L(0)=\frac{4500\cdot e^{0}}{6\cdot e^{0}+744}=\frac{4500}{750}=6$. Zu Beginn erhält das Bild 6 *Like-Klicks*. $L(t)=\frac{4500\cdot e^{0{,}01\cdot t}}{6\cdot e^{0{,}01\cdot t}+744}=\frac{750\cdot e^{0{,}01\cdot t}}{1\cdot e^{0{,}01\cdot t}+124}=\frac{750}{1+124\cdot e^{-0{,}01\cdot t}}$. Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} L(t)=750$. Damit ergibt sich: $\frac{4500\cdot e^{0{,}01\cdot t}}{6\cdot e^{0{,}01\cdot t}+744}=375$ $\Leftrightarrow 4500\cdot e^{0{,}01\cdot t}=2250\cdot e^{0{,}01\cdot t}+279000 \Leftrightarrow 2250\cdot e^{0{,}01\cdot t}=279000$ $\Leftrightarrow e^{0{,}01\cdot t}=124 \Leftrightarrow t=\frac{\ln(124)}{0{,}01}\approx 482$. Nach etwa 8 Stunden hat das Bild die Hälfte seiner *Like-Klicks* erhalten. Skizze des Graphen von L:  Als Erläuterung kommen <u>zum Beispiel</u> folgende Überlegungen in Frage: Die Steigung des Graphen von L ist im Wendepunkt am größten, denn der Graph von L' weist an dieser Stelle ein Maximum auf. Für $t\to\infty$ gilt $L'(t)\to 0$ und $L(t)\to 750$. Deshalb hat der Graph von L' eine waagerechte Asymptote bei y=0 und der Graph von L bei y=750.	2	6	4

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

$$\lim_{x\to\infty}\left(950\cdot r+800-\frac{800}{1+\left(\frac{16}{r}-1\right)\cdot e^{\frac{-0{,}001}{r}\cdot t}}\right)=950\cdot r+800-\frac{800}{1+0}=950\cdot r$$

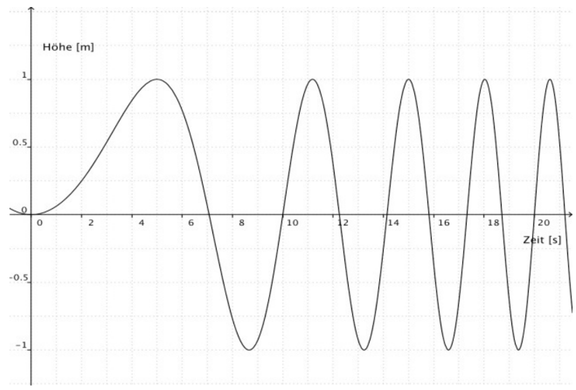
Langfristig sollen $0{,}04\cdot 950=38$ Sportler den *Like-Button* <u>nicht</u> anklicken. Darum muss gelten: $\lim_{t\to\infty} D_r(t)=950\cdot r=38 \Rightarrow r=0{,}04$.



Als Beschreibung kommen <u>zum Beispiel</u> folgende Überlegungen in Frage:
Je kleiner der Parameter r ist, desto kleiner ist $D_r(0)$.
Je kleiner der Parameter r ist, desto kleiner ist $\lim_{t\to\infty} D_r(t)=950\cdot r$.
Je kleiner der Parameter r ist, desto schneller strebt der Graph von D_r gegen die waagerechte Asymptote.
Interpretation: Je kleiner der Parameter r ist, desto beliebter ist das jeweilige Bild.</td><td></td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>16</td><td>11</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

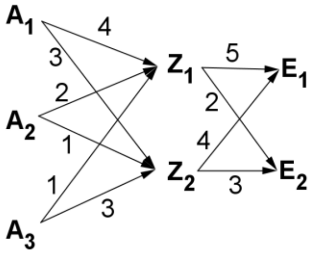
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Es gilt $f(0)=1{,}7$, d. h. der Eimer ist zum Zeitpunkt $t=0$ Sekunden 1,7 Meter über der Wasseroberfläche. Die Amplitude beträgt $a=2$. Das entspricht dem Radius des Schöpfrads mit den Eimern. Mit dem Parameter $b=\frac{\pi}{40}=\frac{2\pi}{P}$ erhält man $P=80$, also eine Periodendauer von 80 Sekunden. Das bedeutet, dass es 80 Sekunden dauert, bis ein Eimer sich wieder an derselben Position befindet. Hoch- und Tiefpunkte: $H_0(20 \mid 3{,}7)$; $H_1(100 \mid 3{,}7)$; $T_1(60 \mid -0{,}3)$; $T_2(140 \mid -0{,}3)$ Für Hoch – und Tiefpunkte der allgemeinen Sinusfunktion $f(t)=a\cdot\sin\left(b\cdot(t-c)\right)+d$ gilt: $H\left(\frac{P}{4}+c+kP \mid d+a\right)$; $k\in\mathbb{Z}$ und $T\left(-\frac{P}{4}+c+kP \mid d-a\right)$; $k\in\mathbb{Z}$. Da der Graph der Funktion gegenüber dem der Funktion $\sin(t)$ nicht nach rechts oder links verschoben ist und die Periodenlänge 80 Sekunden beträgt, ist der gesuchte erste Hochpunkt $H_0(20 \mid 3{,}7)$. Nullstellenbestimmung: $0=2\sin\left(\frac{\pi}{40}t\right)+1{,}7$ liefert zum Beispiel $t\approx -12{,}94$. Der dort in der Nähe liegende Tiefpunkt ist $T_0(-20\,/\,-0{,}3)$. Die Abweichung der Nullstellen von den Tiefpunkten beträgt also $n=\lvert -7{,}06\rvert$. Damit liegen die Nullstellen im betrachteten Intervall bei $N_1(52{,}94\,/\,0)$; $N_2(67{,}06\,/\,0)$; $N_3(132{,}94\,/\,0)$ und $N_4(147{,}06\,/\,0)$, der Eimer ist also etwa in den Zeitintervallen $\left[53\,;67\right]$ und $\left[133\,;147\right]$ unter Wasser. Zum Beispiel: Beschreiben ein Sinusterm und ein Kosinusterm dieselbe Funktion, so sind Amplitude, Ruhelage und Periodenlänge und damit Frequenz gleich. Nur in der Phasenverschiebung unterscheiden sich die Terme. Verwendet man eine Kosinusfunktion anstelle einer Sinusfunktion, so muss diese um eine Viertelperiode nach rechts verschoben werden. (Alternative Lösungen möglich)	5	9	1
b)	Es gilt: $\frac{1}{80}\cdot\int_a^{a+80} f(t)dt=\frac{1}{80}\cdot\left[-\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{40}t\right)+1{,}7t\right]_a^{a+80}$ $=\frac{1}{80}\cdot\left[-\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{40}(a+80)\right)+1{,}7(a+80)-\left(-\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{40}a\right)+1{,}7a\right)\right]$ $=\frac{1}{80}\cdot 1{,}7\cdot 80=1{,}7$ (Erläuterung: Die Kosinus-Terme heben sich wegen der Periodizität mit der Periodendauer 80 auf.) Interpretation: Der durchschnittliche Abstand des Eimers von der Wasseroberfläche während einer Periodendauer ist 1,7 Meter – unabhängig davon, wann die Periode beginnt.		3	2

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>


Zum Beispiel: Der Abstand der Hochpunkte wird immer geringer, d.h. dass ein betrachteter Punkt am Wasserrad die höchste Stelle in immer kürzeren zeitlichen Abständen durchläuft.
$h_1'(t) = \frac{2\pi}{10} \cdot (0,2) \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot 0,1 \cdot t^2\right) = 0,04\pi \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot 0,1 \cdot t^2\right)$
Zum Beispiel: Der Betrag des Kosinusterms in der Funktionsgleichung nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, Der Faktor davor wird jedoch mit wachsendem t immer größer, so dass die Geschwindigkeit, die durch $h_1'(t)$ beschrieben wird, immer größer wird.

Mögliche Lösung sind konkrete Funktionsgleichungen, die als $g(t)$ einen Term enthalten, dessen Ableitung für t ->∞ gegen Null strebt. Begründungen (mit konkreten, von den Schülerinnen und Schülern angegebenen Funktionsgleichungen) zum Beispiel:
$\lim\limits_{t\to\infty} h'(t) = 0$, da $g'(t)$ für $t \to \infty$ gegen 0 strebt und $\left|\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot g(t)\right)\right| \le 1$
</td><td>1</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>16</td><td>11</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Verflechtungsdiagramm:  Für die Herstellung von einem Stück Z_2 werden 3 Stücke von A_1, 1 von A_2 und 3 von A_3 benötigt. Es werden 5 Stücke von Z_1 für die Herstellung von einem Stück E_1 und 2 Stücke von Z_1 für die Herstellung von einem Stück E_1 benötigt. Es gilt: $B_{AZ} * C_{ZE} * \begin{pmatrix}30\\45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32 & 17\\14 & 7\\17 & 11\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}30\\45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1725\\735\\1005\end{pmatrix}$. Für die Produktion von 30 E_1 und 45 E_2 werden 1725 Stück von A_1, 735 von A_2 und 1005 von A_3 benötigt. Es gilt: $(30 \quad 28 \quad 45) * \begin{pmatrix}17\\7\\11\end{pmatrix} + (32 \quad 55) * \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 63 = 1493$. Die Kosten für die Herstellung eines Endprodukts E_2 betragen insgesamt 1493 €.	3	8	2
b)	Mit dem Ansatz $B_{AZ} * \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\10\\a\end{pmatrix}$ ergibt sich das LGS $\left[\begin{array}{r} 4z_1 + 3z_2 = 24\\ 2z_1 + z_2 = 10\\ z_1 + 3z_2 = a\end{array}\right]$. Dieses LGS ist mit $z_1 = 3$ und $z_2 = 4$ und $a = 3 + 3 \cdot 4 = 15$ eindeutig lösbar. Es werden 3 Stücke von Z_1, 4 von Z_2 produziert und 15 Stücke von A_3 verwendet.	2	2	2

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Mit der Technologie-Matrix $A=\begin{pmatrix}\frac{100}{1000} & \frac{200}{1000} & \frac{600}{2000}\\ \frac{300}{1000} & \frac{400}{1000} & \frac{100}{2000}\\ \frac{700}{1000} & \frac{200}{1000} & \frac{1000}{2000}\end{pmatrix}$ ergibt sich die folgende

Leontief-Inverse: $(E-A)^{-1}=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,1&0,2&0,3\\0,3&0,4&0,05\\0,7&0,2&0,5\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{29}{8}&2&\frac{19}{8}\\ \frac{37}{16}&3&\frac{27}{16}\\ 6&4&6\end{pmatrix}$.

Es gilt z.B.: $\vec{x}=1{,}04\cdot\begin{pmatrix}1000\\1000\\2000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1040\\1040\\2080\end{pmatrix}$.</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Mit dem Ansatz $(E-T)*\vec{x}=\vec{y}$ ergibt sich: $\begin{pmatrix}0,9&-0,2&-0,3\\-0,3&0,6&-0,05\\-t&-0,2&0,5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1500\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\600\\200\end{pmatrix}$.

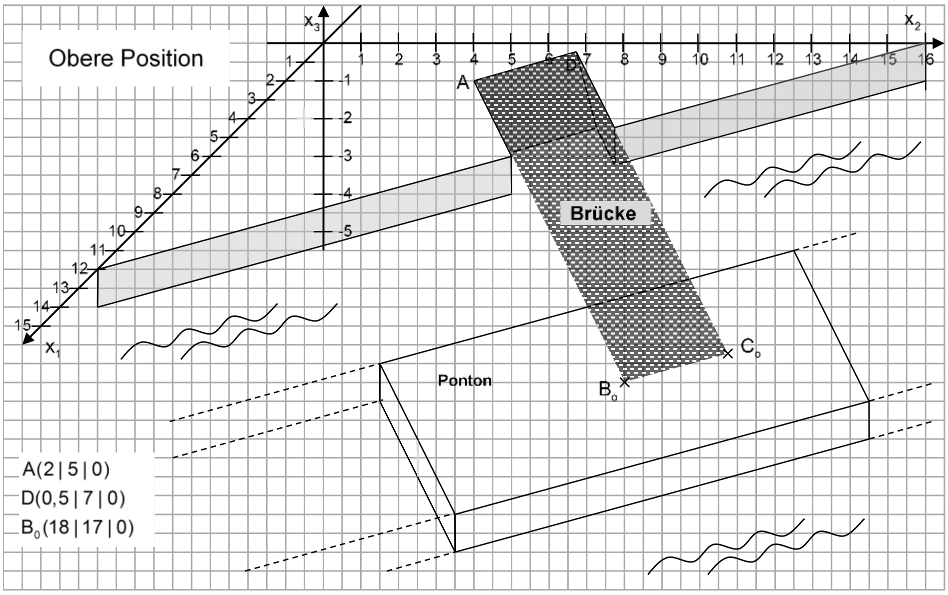
Daraus folgt das LGS $\begin{bmatrix}1350-0,2x_2-0,3x_3=50\\-450+0,6x_2-0,05x_3=600\\-1500t-0,2x_2+0,5x_3=200\end{bmatrix}$ mit den Lösungen
$x_2=2000$, $x_3=3000$ und $t=0,6$.</td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>16</td><td>11</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mit $\overrightarrow{AB_0} = \begin{pmatrix}16\\12\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1,5\\2\\0\end{pmatrix}$ ist $\overrightarrow{AB_0} * \overrightarrow{AD} = 0$ und die beiden Vektoren sind orthogonal.

Da $\left|\overrightarrow{AB_0}\right| = \left|\begin{pmatrix}16\\12\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16^2+12^2} = 20$, ist die Brücke 20 Meter lang.

Die Rechnung $\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}18\\17\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1,5\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16,5\\19\\0\end{pmatrix}$ liefert $C_0(16,5\,|\,19\,|\,0)$.



Zeichnung</td><td>2</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ansatz: $E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ mit d=1, da die Brückenebene offensichtlich nicht den Ursprung enthält (siehe Zeichnung). Einsetzen der drei Punkte führt zu dem linearen Gleichungssystem

$\begin{array}{llll} A: & a\cdot 2 & +b\cdot 5 & +c\cdot 0 &=1 \\ D: & a\cdot 0,5 & +b\cdot 7 & +c\cdot 0 &=1 \\ F: & a\cdot 6 & +b\cdot 8 & +c\cdot(-1) &=1 \end{array}$, mit Lösung $a = \frac{4}{23}$, $b = \frac{3}{23}$ und $c = \frac{25}{23}$.

So lautet die Ebenengleichung $E: \frac{4}{23}\cdot x_1 + \frac{3}{23}\cdot x_2 + \frac{25}{23}\cdot x_3 = 1$ oder vereinfacht

$E: 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 25\cdot x_3 = 23$.

Der Abstand des Punktes $P(14\,|\,14\,|\,-3,9)$ zu der Ebene E berechnet sich durch

$\text{Abstand}(E;P) = \left|\frac{4\cdot 14 + 3\cdot 14 + 25\cdot(-3,9) - 23}{\sqrt{4^2+3^2+25^2}}\right| \approx 0,88$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Brücke hat also ca. 88 cm Abstand von dem Punkt P auf der Kante.

Z.B.: Aus der Koordinatengleichung ist zu entnehmen, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E ist.

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor und einer Vertikalen ergibt sich durch:
$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{25}{\sqrt{650}} \quad \text{und} \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{650}}\right) \approx 11{,}31^\circ .$$
Dieser Winkel entspricht dem Neigungswinkel der Ebene E. Dann ist die Steigung mit $\tan(11{,}31^\circ) = 0{,}20$ also 20 Prozent, und damit ist die Brücke zu steil für den Rollstuhlfahrer ohne Hilfe.</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Parametergleichung der Geraden g:
$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ (r \in \mathbb{R})$$
Bestimmung des Auflagepunktes B_1:

Die Länge von $\left|\overrightarrow{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

Das führt, mit Hilfe der Brückenlänge von 20 Metern, zu
$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{20}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}69 \\ 16{,}77 \\ -3{,}92 \end{pmatrix},$$
also $B_1(17{,}69 \mid 16{,}77 \mid -3{,}92)$.

Um den Abstand zu berechnen um den sich der Auflagepunkt bei Absenkung des Pontons verschoben hat, benötigen wir nur die ersten beiden Koordinaten der Punkte $B_0(18 \mid 17 \mid 0)$ und $B_1(17{,}69 \mid 16{,}77 \mid -3{,}92)$, da nur die horizontale Verschiebung hier relevant ist: Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:
$$\sqrt{(18 - 17{,}69)^2 + (17 - 16{,}77)^2} \approx 0{,}39 .$$
Der Auflagepunkt hat sich also um ca. 39 cm verschoben.</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>16</td><td>11</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Mögliche Erläuterung: Die Anzahl reservierter Zimmer kann stufenweise betrachtet werden, je Stufe gibt es zwei mögliche Ergebnisse: das Zimmer wird nach einer Reservierung belegt oder es wird trotz Reservierung nicht belegt. Dieses Merkmal eines binomialverteilten Zufallsversuchs erfüllt die Situation. Zudem erfordert eine Binomialverteilung Unabhängigkeit der Stufen. Für die Modellierung ist also anzunehmen, dass Stornierungen von Zimmern unabhängig sind. Dies trifft z.B. nicht zu, wenn eine Gruppe mehrere reservierte Zimmer storniert. X : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0,75$. $E(X) = 16 \cdot 0,75 = 12$ Zu erwarten sind 12 eingehaltene Reservierungen bzw. belegte Zimmer. $P(X \leq 15) = 1 - P(X = 16) = 1 - 0,75^{16} \approx 0,99$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Zimmer nicht belegt wird, liegt bei ca. 99%.	3	3	
b)	Y : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 19$ und $p = 0,75$. $P(Y = 16) = \binom{19}{16} \cdot 0,75^{16} \cdot 0,25^{3} \approx 0,15$ Die Wahrscheinlichkeit für 16 eingehaltene Reservierungen und damit für ein genau voll belegtes Hotel liegt bei ca. 15%. $P(Y > 16) = P(Y = 17) + P(Y = 18) + P(Y = 19)$ $= \binom{19}{17} \cdot 0,75^{17} \cdot 0,25^{2} + \binom{19}{18} \cdot 0,75^{18} \cdot 0,25 + 0,75^{19} \approx 0,11$ Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 16 eingehaltene Reservierungen, also dafür, dass die Zimmer nicht ausreichen, liegt bei ca. 11%.	1	3	
c)	H_0 : Der Anteil eingehaltener Reservierungen ist nicht gesunken, also $p_0 \geq 0,75$. H_1 : Der Anteil eingehaltener Reservierungen ist gesunken, also $p_1 < 0,75$. X : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0,75$ $\mu = 400 \cdot 0,75 = 300$ und $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = 5 \cdot \sqrt{3} > 3$ Da es ein linksseitiger Test bei einem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ ist, ergibt sich $\mu - 1,64\sigma = 300 - 1,64 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \approx 285,8$. Damit gilt $P(X \leq 285) < 0,05$ und der Verwerfungsbereich ist $V = \{0;...;285\}$. Die Vorgabe von 290 eingehaltenen Reservierungen spricht also nicht für die Ablehnung von H_0, d.h. man nimmt an, dass die Wahrscheinlichkeit nicht gesunken ist. Ein Fehler 2. Art bedeutet, dass der Anteil eingehaltener Reservierungen tatsächlich gesunken ist, dies bei der Testdurchführung jedoch nicht erkannt wird, da das Ergebnis nicht im Verwerfungsbereich der Nullhypothese liegt. X: Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 400$ und $p_1 = 0,7$. $\beta = P(X > 285) = 1 - P(X \leq 285) \approx 1 - 0,7242 = 0,2758 \approx 0,28$ Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei $p_1 = 0,7$ beträgt ca. 28%.	1	6	4

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

X : Anzahl eingehaltener Reservierungen, binomialverteilt mit $n = 192$ und $p = 0,75$

$\sigma = \sqrt{192 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = 6 > 3$
Die Laplace-Bedingung ist somit erfüllt.

$z = \frac{k - \mu}{\sigma} = \frac{147 - 0,75 \cdot 192}{\sqrt{192 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = 0,5$
$P(X \le 147) \approx \Phi(0,5) \approx 0,6915$ (in Anlage 2 bei $z = 0,50$ ablesbar)

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 69% werden 147 oder weniger Reservierungen eingehalten bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 31% ist die Anzahl der Zimmer nicht ausreichend.

Der Ansatz setzt bei n angenommenen Reservierungen eine Vorgabe für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Zimmer nicht ausreicht. Diese soll nunmehr bei 1% liegen. Der Geschäftsführer möchte herausfinden, wie viele Reservierungen er bei Einhaltung dieser Bedingung annehmen kann.

Lösung der Gleichung mit CAS: $n_1 \approx 178,05$, $n_2 \approx 215,76$

Da $n_2 > n = 192$ ist n_2 auszuschließen, es bleibt als Lösung $n_1 \approx 178$. Der Geschäftsführer kann somit 178 Reservierungen annehmen, wenn die neue Vorgabe eingehalten werden soll. Er kann 31 zusätzliche Reservierungen annehmen und hat dennoch nur ein geringes Risiko, dass seine Zimmer nicht ausreichen.

Da $1 - \Phi\left(\frac{147 - 0,75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0,75 \cdot 0,25}}\right) = 0,01$ folgt $\Phi\left(\frac{147 - 0,75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0,75 \cdot 0,25}}\right) = 0,99$.
In der Tabelle lässt sich ablesen: $\Phi(2,32) < 0,99$ und $\Phi(2,33) > 0,99$, also
$\frac{147 - 0,75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 2,33$

</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>16</td><td>11</td></tr>
</table>

Schriftliche Abiturprüfung 2016

Leistungskurs Mathematik

Freitag, 29. April 2016, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

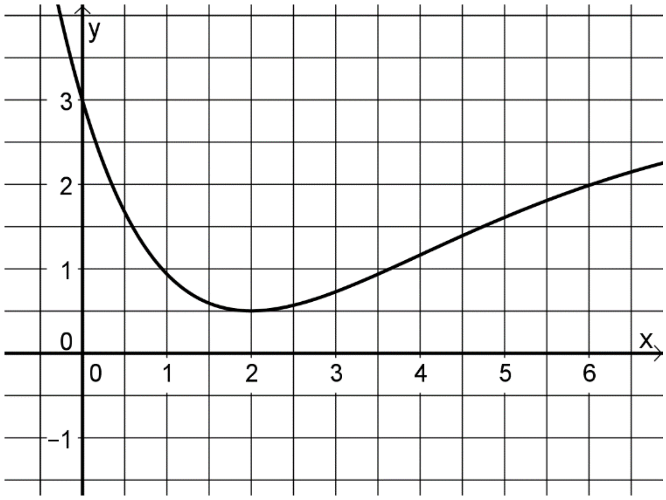
- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$.

(2 Punkte)

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

b) Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 Punkte)

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ gilt.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an.

(1 Punkt)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt.

(4 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

a) Berechnen Sie für $p = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$.

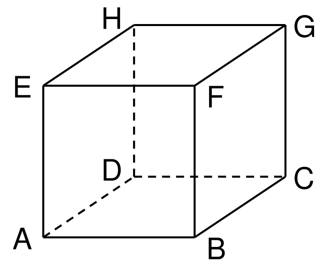
(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für jeden Wert von p gilt: $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.

(2 Punkte)

b) Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B. In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst.

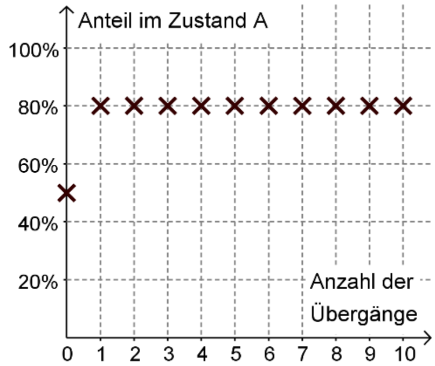
(2 Punkte)

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben. Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die nebenstehende Abbildung stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.

Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann.

(3 Punkte)



Schriftliche Abiturprüfung 2016

Leistungskurs Mathematik (CAS)

Freitag, 29. April 2016, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 225 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Computer-Algebra-System (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Elektroautos **[Logo: Elektrische Tanksäule]**

Die Akku-Ladezeiten von modernen Elektroautos sind sehr unterschiedlich. Mit einem normalen Haushaltsanschluss dauert es bis zu 16 Stunden, neuere Technologien ermöglichen das Laden innerhalb einer Stunde. In dieser Aufgabe werden verschiedene Ladevorgänge untersucht. Die Geschwindigkeit, mit der ein Akku aufgeladen wird, wird im Folgenden als Ladegeschwindigkeit bezeichnet und in Kilowatt (kW) angegeben[1].

a) Von einem Akku-Ladevorgang kennt man die folgenden Eigenschaften: Zu Beginn beträgt die Ladegeschwindigkeit $3{,}7\,\text{kW}$. Zehn Stunden nach Beginn ist die Ladegeschwindigkeit auf 0 kW gesunken, auch die momentane Änderungsrate der Ladegeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 0 kW pro Stunde.

Bestimmen Sie eine Funktion g vierten Grades mit $g(t) = b \cdot t^4 + c \cdot t^3 + d$, die diesen Ladevorgang modelliert. Dabei ist $g(t)$ die Ladegeschwindigkeit in kW und t die Zeit in Stunden seit Beginn des Ladevorgangs.

(7 Punkte)

In den folgenden Aufgabenteilen werden verschiedene Ladevorgänge für den gleichen Akku an verschiedenen Ladestationen betrachtet, sodass die Ladedauer a für eine volle Aufladung des Akkus unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Funktionen f_a mit

$$f_a(t) = \frac{99}{a^5} \cdot t^4 - \frac{132}{a^4} \cdot t^3 + \frac{33}{a} \quad \text{für } t, a \in \mathbb{R} \text{ mit } 1 \le a \le 16 \text{ und } 0 \le t \le a$$

modellieren verschiedene Ladegeschwindigkeiten. Dabei gibt $f_a(t)$ die Ladegeschwindigkeit in kW und t die Zeit in Stunden seit Beginn des Ladevorgangs an. Der Wert von a gibt jeweils die Ladedauer für eine volle Aufladung des Akkus in Stunden an.

Einige Lademöglichkeiten	
max. 3,7 kW	Steckdose [Foto Steckdose]
max. 11 kW	Wallbox [Foto Wallbox]
max. 22 kW	Ladestation [Foto Ladestation]

Die beiden Graphen zu $f_{1,5}$ und f_3 sind im Anhang abgebildet.

b) **Ermitteln** Sie, welcher Graph zu $f_{1,5}$ und welcher zu f_3 gehört.

Geben Sie für beide Funktionen jeweils den Definitionsbereich **an**.

Berechnen Sie die Ladedauer a nach dieser Modellierung, wenn man den Akku mit einer einfachen Haushaltssteckdose aufladen würde, die zu Beginn eine Ladegeschwindigkeit von $2{,}3$ kW besitzt.

(4 Punkte)

c) In diesem Aufgabenteil sollen die Funktionen f_a für $t \in \mathbb{R}$ untersucht werden, also ohne die Einschränkung $0 \le t \le a$.

Weisen Sie **nach**, dass für jedes a der Graph von f_a im Punkt $T(a\,|\,0)$ einen Tiefpunkt besitzt.

Begründen Sie nur mit dem bisher Bekannten, ohne weitere Rechnung, warum der Graph einer Stammfunktion F_a von f_a an der Stelle $t = a$ einen Sattelpunkt hat.

(12 Punkte)

[1] Die Geschwindigkeit in Kilowatt ergibt sich über die geladene Energie in Kilowattstunden pro Stunde.
Es gilt: $\text{Ladegeschwindigkeit} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}$. Einheit: $\frac{\text{kWh}}{\text{h}} = \text{kW}$.

d) In diesem Aufgabenteil geht es um den aktuellen Ladezustand, d.h. die Energie, die in dem Akku zum Zeitpunkt t gespeichert ist. Die Funktionen F_a mit

$$F_a(t) = \frac{99}{5 \cdot a^5} \cdot t^5 - \frac{33}{a^4} \cdot t^4 + \frac{33}{a} \cdot t \text{ für } 1 \le a \le 16 \text{ und } 0 \le t \le a$$

modellieren den Ladezustand des Akkus. Dabei wird der Ladezustand F_a in Kilowattstunden (kWh) und die Zeit t in Stunden nach Beginn angegeben. Der hier untersuchte Akku ist mit $19{,}8$ kWh zu 100% voll geladen. Zur Vereinfachung der Modellierung gehen wir davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Akku vollständig entladen ist.

Zeigen Sie, dass F_a eine Stammfunktion von f_a ist.

Berechnen Sie $F_3(3)$. **Veranschaulichen** Sie das Ergebnis im Anhang und **interpretieren** Sie es im Sachzusammenhang.

Der Hersteller des Akkus rät, den Akku nur zu 90% zu laden, damit er länger hält.

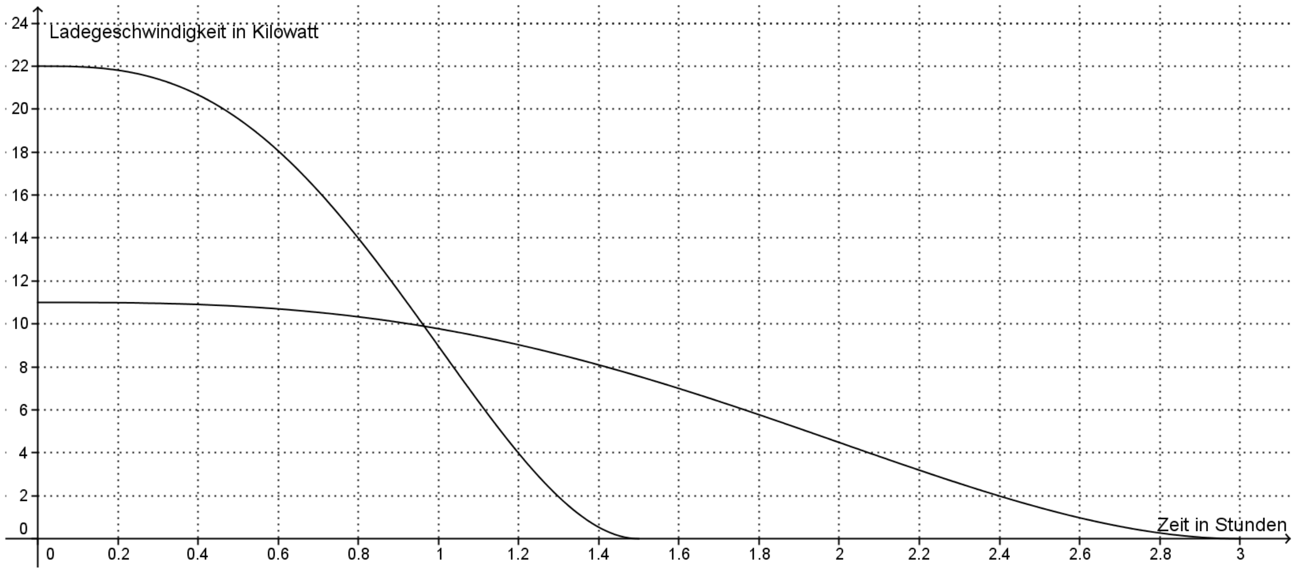
Bestimmen Sie für $a = 3$ den Zeitpunkt t, zu dem ein Ladezustand 90% erreicht wird.

Weisen Sie für alle a **nach**, dass die Gleichung: $\int_0^a f_a(t)\,dt = 19{,}8$ gilt.

Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

(10 Punkte)

Anhang



Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Beliebte Bilder

[Logo: Like]

Die 950 aktiven Sportler eines Vereins kommunizieren in einem sozialen Netzwerk miteinander und laden in ihrer Gruppe auch Bilder hoch. Wem ein solches Bild gefällt, der zeigt dies, indem er den *Like-Button* anklickt. Nach der Meisterfeier werden einige witzige Fotos hochgeladen, auf die viele Vereinsmitglieder bereits sehnsüchtig gewartet haben.

Die Funktion f modelliert die **Geschwindigkeit**, mit der eines dieser beliebten Bilder *Like-Klicks* erhält.

Dabei steht $t \geq 0$ für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und f(t) für die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute zum Zeitpunkt t.

In einem ersten Versuch wird f mit einer Exponentialfunktion der Form $f(t) = c \cdot a^t$ modelliert.

Nach 42 Minuten ist die Geschwindigkeit 1,80 *Like-Klicks* pro Minute. Nach 3 Stunden und 21 Minuten liegt sie nur noch bei 1,21 *Like-Klicks* pro Minute.

a) **Erläutern** Sie, warum im Term von f für den Wert a gilt a<1.

Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Angaben die zur Funktion f gehörige Gleichung. Runden Sie den Wert a auf vier Nachkommastellen.

(6 Punkte)

Die Funktion f lässt sich auch in der folgenden Form darstellen:

$$f(t) = 2 \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}.$$

Dabei steht $t \geq 0$ wieder für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und f(t) für die Anzahl der hinzu kommenden *Like-Klicks* pro Minute zum Zeitpunkt t, also für die **Geschwindigkeit**, mit der das beliebte Bild *Like-Klicks* erhält.

b) **Zeigen** Sie, dass F mit $F(t) = 800 - 800 \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}$ eine Stammfunktion zur Funktion f ist.

Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bis 70% aller 950 Sportler den *Like-Button* angeklickt haben.

(5 Punkte)

[Logo: Like]

Im Folgenden wird die **Gesamtanzahl** der *Like-Klicks* betrachtet, die ein anderes beliebtes Bild erhält, das ebenfalls nach der Meisterfeier in der Gruppe hochgeladen wurde.

Diese Gesamtanzahl der *Like-Klicks* gibt die Funktion L an mit

$$L(t) = \frac{4500 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}}{6 \cdot e^{0{,}01 \cdot t} + 744} \quad .$$

Dabei steht $t \geq 0$ wieder für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und L(t) für die Gesamtanzahl der *Like-Klicks* zum Zeitpunkt t.

c) **Berechnen** Sie die Anzahl der *Like-Klicks* zum Zeitpunkt t=0.

Zeigen Sie mit Termumformungen, dass gilt: $\dfrac{4500 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}}{6 \cdot e^{0{,}01 \cdot t} + 744} = \dfrac{750}{1 + 124 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}}$.

Dieses Bild gefällt nicht allen 950 Sportlern, so dass es insgesamt weniger *Like-Klicks* erhält.

Untersuchen Sie, nach wie vielen Stunden das Bild die Hälfte seiner *Like-Klicks* erhalten hat.

Skizzieren Sie den zur Funktion L gehörigen Graphen in Abbildung 1.

In Abbildung 2 ist der Graph der Funktion L' gezeichnet.

Erläutern Sie zwei Eigenschaften des Graphen von L mit Hilfe von zwei Eigenschaften, die sich auf den Verlauf des Graphen von L' beziehen.

(12 Punkte)

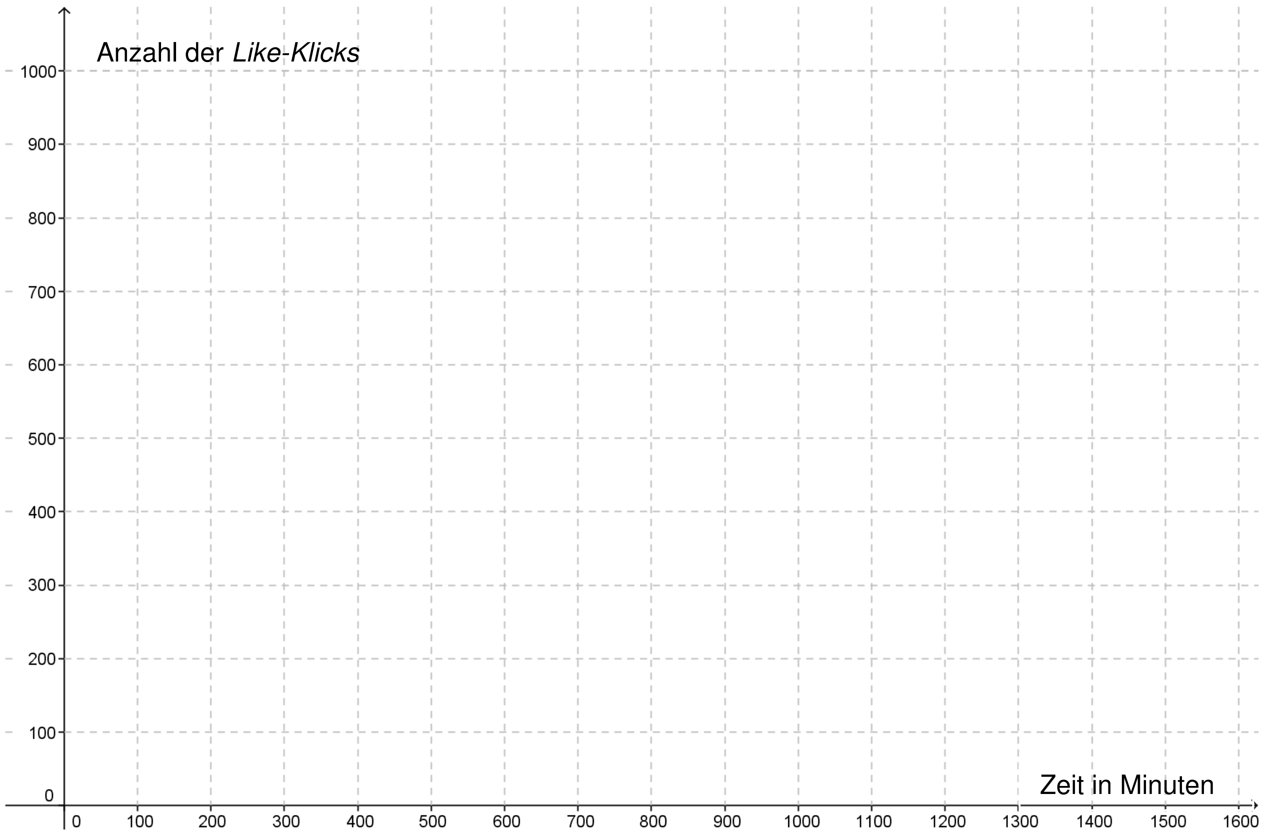


Abbildung 1

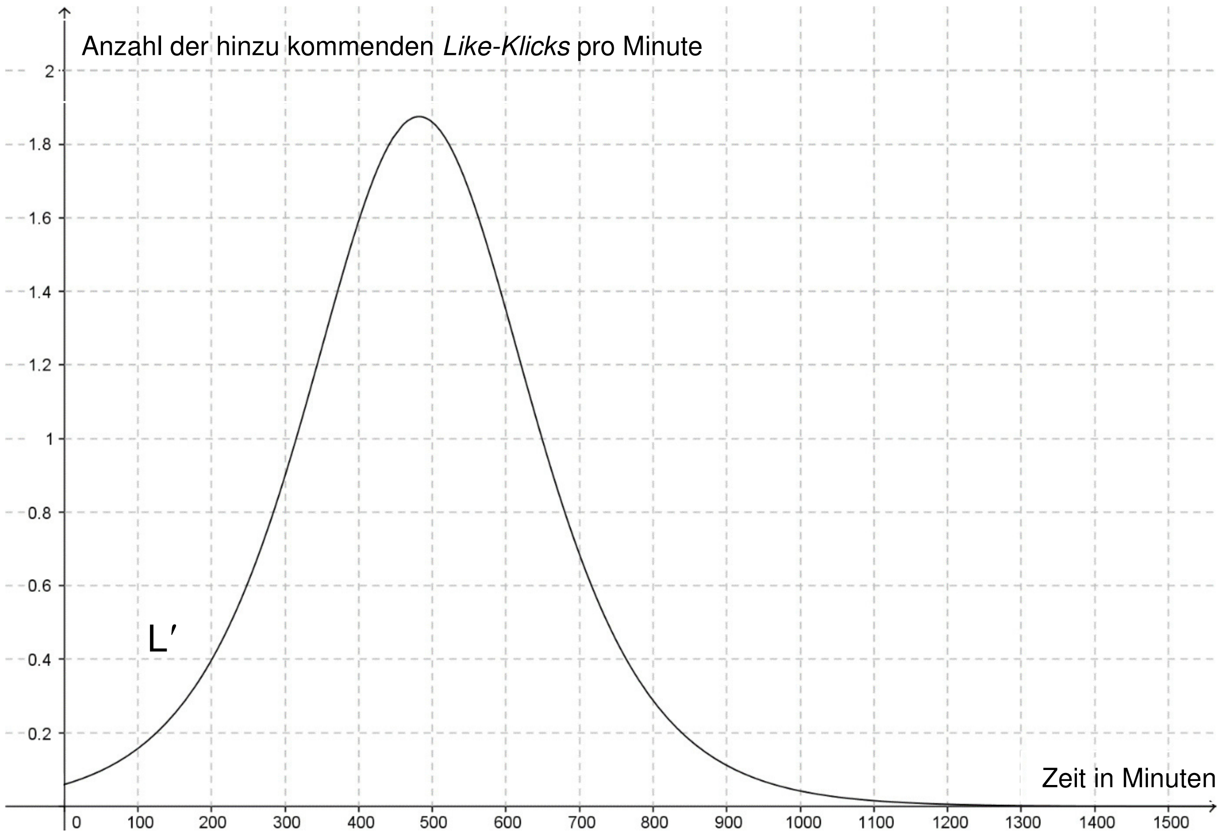


Abbildung 2

Wie beliebt ein neues Bild in der Gruppe der Sportler ist, wird mit Hilfe des Parameters r modelliert.

Die **Anzahl** der Sportler, die den *Like-Button* nicht angeklickt haben, lässt sich allgemein durch Funktionen D_r beschreiben mit

$$D_r(t) = 950 \cdot r + 800 - \frac{800}{1 + \left(\frac{16}{r} - 1\right) \cdot e^{\frac{-0{,}001}{r} \cdot t}}, \text{ wobei } r>0.$$

Dabei steht $t \geq 0$ für die Zeit in Minuten ab dem ersten *Like-Klick* und $D_r(t)$ für die Anzahl der Sportler, die den *Like-Button* zum Zeitpunkt t nicht angeklickt haben.

d) **Bestimmen** Sie den Grenzwert $\lim_{t \to \infty} D_r(t)$ in Abhängigkeit von r.

Bestimmen Sie den Wert des Parameters r so, dass langfristig nur 4% aller 950 Sportler den *Like-Button* nicht anklicken.

In Abbildung 3 sind die Graphen zu D_r für drei unterschiedliche Werte des Parameters r zu sehen:

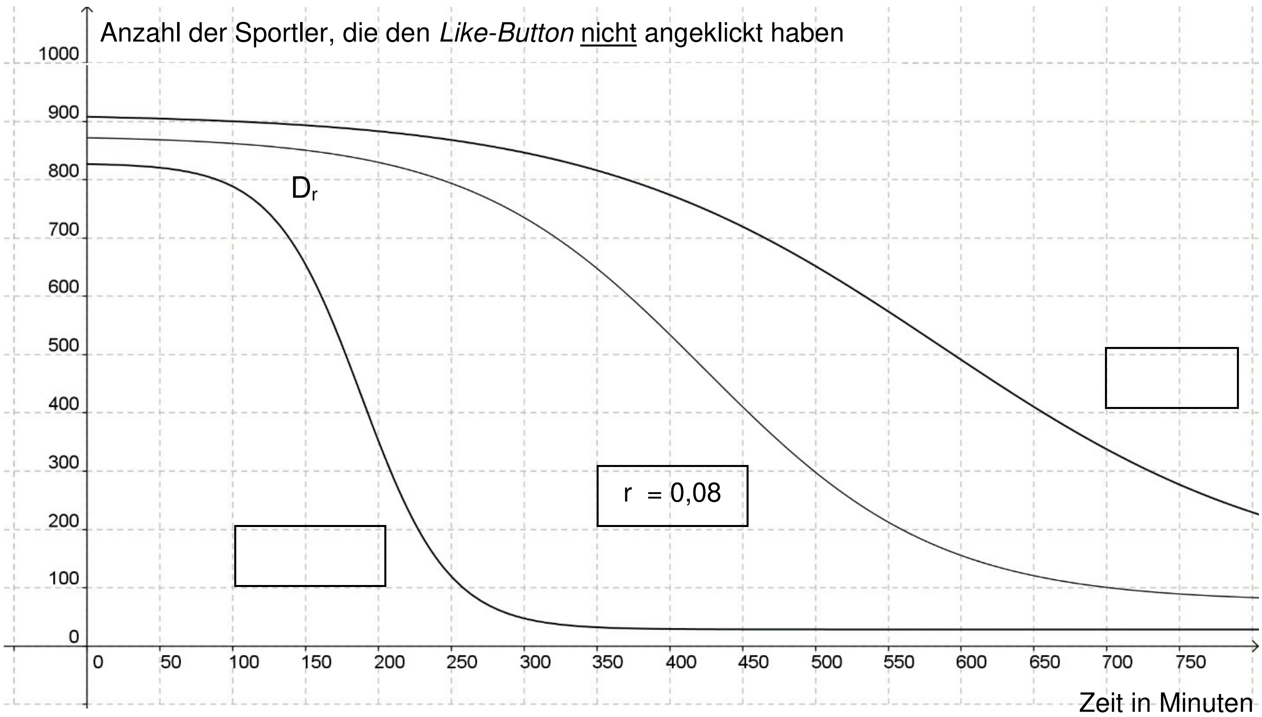


Abbildung 3

Geben Sie **an**, welche Graphen zu den Werten r=0,03 und r=0,12 gehören.

Beschreiben Sie drei Auswirkungen, die der Parameter r auf den Verlauf der Graphen von D_r hat.

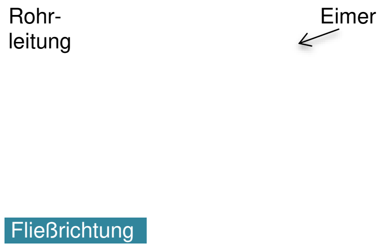
Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters r hinsichtlich der Beliebtheit des jeweiligen Bildes.

(10 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Wasserschöpfräder



[Abb. 1 - schematische Zeichnung eines Wasserschöpfrads]

[Abb. 2 – historisches Wasserschöpfrad in Bayern]

Als Bewässerungssystem spielen Wasserschöpfräder in vielen Entwicklungsländern eine wichtige Rolle.

Ein Schöpfrad ist ein rotierendes Wasserrad, an dessen Rand Wassereimer befestigt sind. Ein Teil des Schöpfrads taucht ins Wasser ein. Die Eimer füllen sich mit Wasser, wenn sie in den Fluss eintauchen. Im Bereich des höchsten Punktes des Rades entleert sich der Inhalt der Eimer dann in ein Auffangbecken. Von dort fließt das Wasser in einen Bewässerungskanal.
Wir betrachten die Drehung eines Wasserschöpfrads über einen Zeitraum von 150 Sekunden. In dieser Zeit bewegen sich die Wassereimer gleichmäßig im Kreis.

Die Funktion f mit

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{40}t\right) + 1{,}7\,;\quad t \in \mathbb{R},$$

beschreibt für $t \in [0;150]$ den Abstand eines Punktes am äußeren Rand eines bestimmten Eimers von der Wasseroberfläche. Wenn im Folgenden „Eimer“ geschrieben wird, so ist dieser Punkt gemeint. t ist die Zeit in Sekunden, $f(t)$ der Abstand in Meter.[1]

a) Die Funktion f wird im Folgenden im Intervall [0;150] näher untersucht.

Berechnen Sie für $t = 0$ Sekunden den Abstand des Eimers von der Wasseroberfläche.

Geben Sie die Amplitude der Funktion f **an**, **berechnen** Sie die Periodenlänge und **interpretieren** Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte im betrachteten Intervall **an** und **erläutern** Sie, wie Sie mit Hilfe der Parameter in der allgemeinen Funktionsgleichung die Koordinaten des ersten Hochpunkts bestimmen können.

Berechnen Sie die Zeitintervalle, in denen der Eimer unter Wasser ist.

Begründen Sie, dass f(t) auch durch den Term $2\cos\left(\frac{\pi}{40}(t-20)\right)+1{,}7$ dargestellt werden kann.

(15 Punkte)

b) Die Funktion F mit $F(t) = -\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{40}t\right) + 1{,}7\,t;\quad t \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.

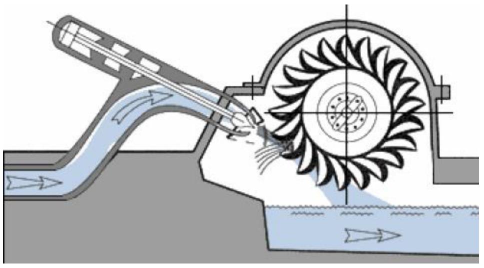
Nutzen Sie diese Form und **zeigen** Sie mit Hilfe einer Rechnung, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $b = a + 80$ gilt: $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(t)\,dt = 1{,}7$.

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

[1] Negative Funktionswerte bedeuten, dass der Eimer sich unterhalb der Wasseroberfläche befindet.

c) Wasserräder können auch zur Stromerzeugung eingesetzt werden. Der Wasserzufluss kann geregelt werden.



Im Folgenden wird eine Funktion h betrachtet, die die Bewegung eines Punktes am äußeren Rand eines Wasserrads modelliert. Dabei ist h(t) der Abstand des Punkts von der horizontalen Achse durch den Mittelpunkt des Wasserrads zur Zeit $t > 0$, gemessen in Meter, t in Sekunden.

Die Funktion h ist eine verkettete Funktion aus einer Sinus-Funktion und der Funktion g mit der Gleichung

$$h(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot g(t)\right).$$

Die Drehung des Wasserrads wäre gleichmäßig, wenn gelten würde: $h(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)$. Ist g eine Funktion mit $g(t) = 0{,}1\,t^2$, beschreibt die Funktion h eine Bewegung des Wasserrads, die immer schneller wird. In den folgenden drei Unteraufgaben geht es zunächst um die Funktion h, die diese immer schneller werdende Bewegung beschreibt.

Skizzieren Sie den Graphen von h im Bereich [0;20] im Koordinatensystem im Anhang und erläutern Sie, woran man erkennt, dass die Bewegung immer schneller wird.

Leiten Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln eine Gleichung von $h'(t)$ **her.**

Begründen Sie durch eine Betrachtung der Gleichung von h', dass die Geschwindigkeit des Wasserrads mit zunehmender Zeit zunimmt.

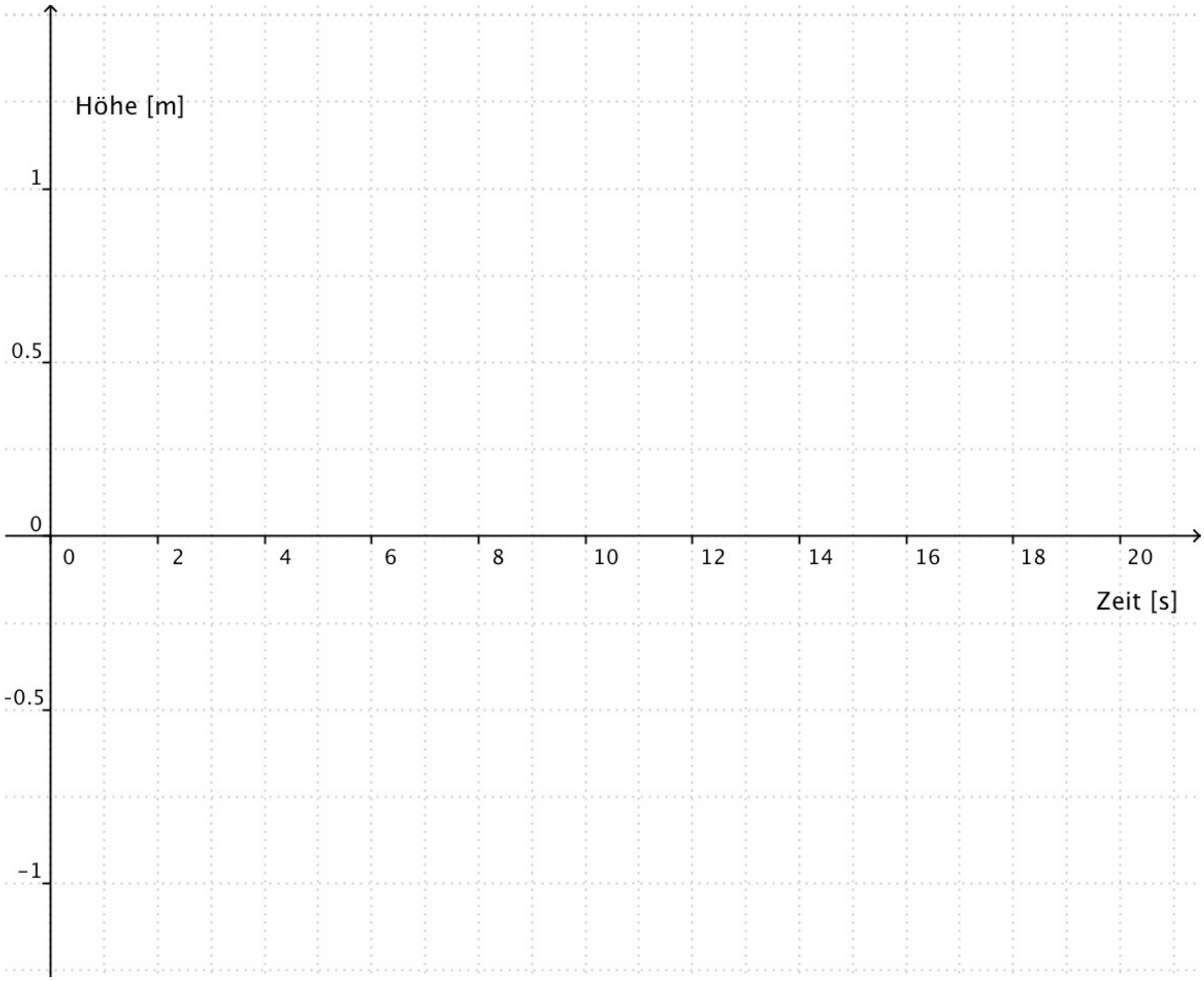
Ermitteln Sie nun eine mögliche Funktionsgleichung g(t), mit der h eine Bewegung darstellen könnte, die immer langsamer wird.

Begründen Sie durch eine Betrachtung der Gleichung zu h', dass die Geschwindigkeit des Wasserrads mit zunehmender Zeit abnimmt.

(13 Punkte)

Bildnachweise: http://static.panoramio.com/photos/original/21748629.jpg (20.1.2016)
http://www.leifiphysik.de/sites/default/files/medien/schoepfrad_regeneratenergie_ges.gif (20.1.2016)
https://www.vde.com/de/fg/etg/arbeitsgebiete/v1/publishingimages/wasserkraft/pelton-turbine.jpg (30.1.2016)

Anhang



Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra **CAS**

Automobilzulieferer

Ein Automobilzulieferer stellt in zwei Produktionsstufen gemäß der nachfolgenden Matrizen B_{AZ} und C_{ZE} aus den Ausgangsprodukten A_1, A_2 und A_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus anschließend die beiden Endprodukte E_1 und E_2 her:

$$B_{AZ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Mengenangaben der Produkte sind in Stückzahlen angegeben.

a) **Erstellen** Sie zu dem Produktionsprozess ein Verflechtungsdiagramm.

Interpretieren Sie die zweite Spalte von B_{AZ} und die erste Zeile von C_{ZE} im Sachzusammenhang.

In einem Produktionsprozess sollen $30\ E_1$ und $45\ E_2$ produziert werden.
Bestimmen Sie jeweils die Stückzahlen der dazu erforderlichen Ausgangsprodukte.

Den folgenden Tabellen können die Anschaffungs- und Fertigungskosten für die Ausgangs- und Zwischenprodukte entnommen werden, die dem Automobilzulieferer pro Stück entstehenden:

	A_1	A_2	A_3
Anschaffungskosten	30€	28€	45€

	Z_1	Z_2
Fertigungskosten	32€	55€

Die Kosten für die Fertigung eines Endprodukts E_2 aus den Zwischenprodukten betragen 63€ .
Bestimmen Sie durch Matrix-Vektor-Rechnung die Kosten, die dem Automobil-Zulieferer für die Herstellung eines Endprodukts E_2 für Anschaffung und Fertigung insgesamt entstehen.

(13 Punkte)

b) Bei einem Produktionsvorgang von Zwischenprodukten wurden 24 Stücke von A_1, 10 Stücke von A_2 und a Stücke von A_3 verwendet.
Bestimmen Sie für diesen Vorgang jeweils die Stückzahlen z_1 und z_2 der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und die Stückzahl a von A_3.

(6 Punkte)

Der Automobilzulieferer hat drei Tochterunternehmen T_1, T_2 und T_3. Diese sind aktuell nach dem Leontief-Modell, wie in der folgenden Input-Output-Tabelle angegeben, miteinander verflochten:

		Abgabe an			
		T_1	T_2	T_3	Markt
Abgabe von	T_1	100	200	600	100
	T_2	300	400	100	200
	T_3	700	200	1000	100

c) **Bestimmen** Sie zu dieser Verflechtung die Leontief-Inverse.

Für den nächsten Zeitraum wird vorhergesagt, dass die Abgabe an den Markt um 4% steigt.

Bestimmen Sie dazu den Produktionsvektor $\vec{x}$.

(7 Punkte)

Veränderungen bei der Produktion ergeben den Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 600 \\ 200 \end{pmatrix}$,

den Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1500 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und die Technologie-Matrix $T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ t & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

d) **Bestimmen** Sie zu dieser Situation für x_2, x_3 und t geeignete Zahlen.

(7 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

CAS

Martinianleger

Am Weserufer in Bremen legen Schiffe am Martinianleger an. Vor der Ufermauer senkt und hebt sich ein Ponton an senkrechten Pfählen bei Ebbe und Flut. Fußgänger gelangen über eine Brücke vom Ufer zum Ponton (siehe Abbildungen 1 und 2).

Die Zeichnungen im Material in den Abbildungen 3 und 4 zeigen einen Ausschnitt des Martinianlegers bei zwei verschiedenen Wasserständen.
Eine Einheit entspricht einem Meter.

[Abbildung 1 – Martinianleger]

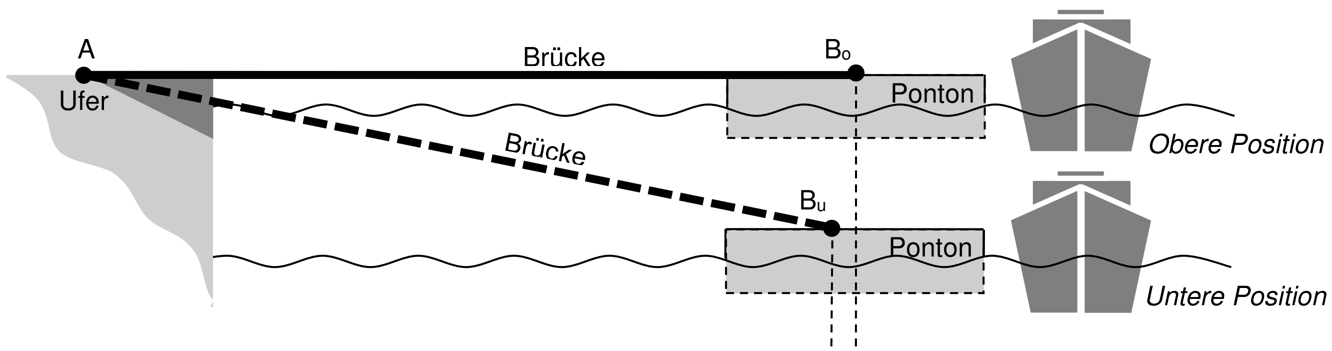


Abbildung 2 – Positionen des Pontons, seitliche Ansicht, schematische Darstellung

a) In diesem Aufgabenteil sind die begehbare Fläche des Pontons und die Brücke in gleicher Höhe wie die Uferpromenade, siehe die obere Position der Abbildung 2 und im Material die Abbildung 3.

Die Brücke ist am Ufer an den Punkten $A(2\,|\,5\,|\,0)$ und $D(0{,}5\,|\,7\,|\,0)$ befestigt und liegt auf dem Ponton nur auf. Die Aufliegepunkte sind in dieser Position $B_o(18\,|\,17\,|\,0)$ und C_o.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_o}$ und $\overrightarrow{AD}$ zueinander orthogonal sind.

Zeigen Sie, dass die Länge der Brücke 20 Meter beträgt.

Bestimmen Sie Koordinaten für den Punkt C_o, so dass die Brückeneckpunkte A, B_o, C_o und D ein Rechteck bilden und **zeichnen** Sie die Brücke als Rechteck im Koordinatensystem im Material in Abbildung 3 ein.

(9 Punkte)

Der Wasserstand ist nun gesunken, der Ponton ist tiefer als die Uferpromenade und die Brücke ist geneigt, siehe untere Position in Abbildung 2 und im Material die Abbildung 4.

b) Die Brücke liegt nun in der Ebene E, die durch die Punkte A, D und $F(6\,|\,8\,|\,-1)$ definiert ist.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

[Sie können im Folgenden mit der Koordinatengleichung $E: 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 = 23$ rechnen.]

Der Punkt $P(14\,|\,14\,|\,-3{,}9)$ ist an der oberen Kante des Pontons und unterhalb der Brücke. **Ermitteln** Sie den Abstand von P zur Brücke.

Ein Rollstuhlfahrer möchte über die Brücke fahren. Er kann eine Neigung von 18% selbstständig bewältigen. **Entscheiden** Sie auf der Grundlage geeigneter Rechnungen, ob der Rollstuhlfahrer bei diesem Wasserstand die Brücke selbstständig befahren kann.

(14 Punkte)

c) Eine Brückenseite verläuft entlang einer Geraden g durch die Punkte A und F.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g.

Ermitteln Sie auf zwei Nachkommastellen genau den Auflagepunkt B_u dieser Brückenseite auf dem abgesenkten Ponton, indem Sie einen geeigneten Punkt B_u auf der Geraden g finden, der den Abstand 20 zu Punkt A hat.

Berechnen Sie, um wie viele Zentimeter sich der Auflagepunkt dieser Brückenseite auf dem Ponton beim Absenken des Wasserstandes horizontal verschoben hat.

(10 Punkte)

Material:

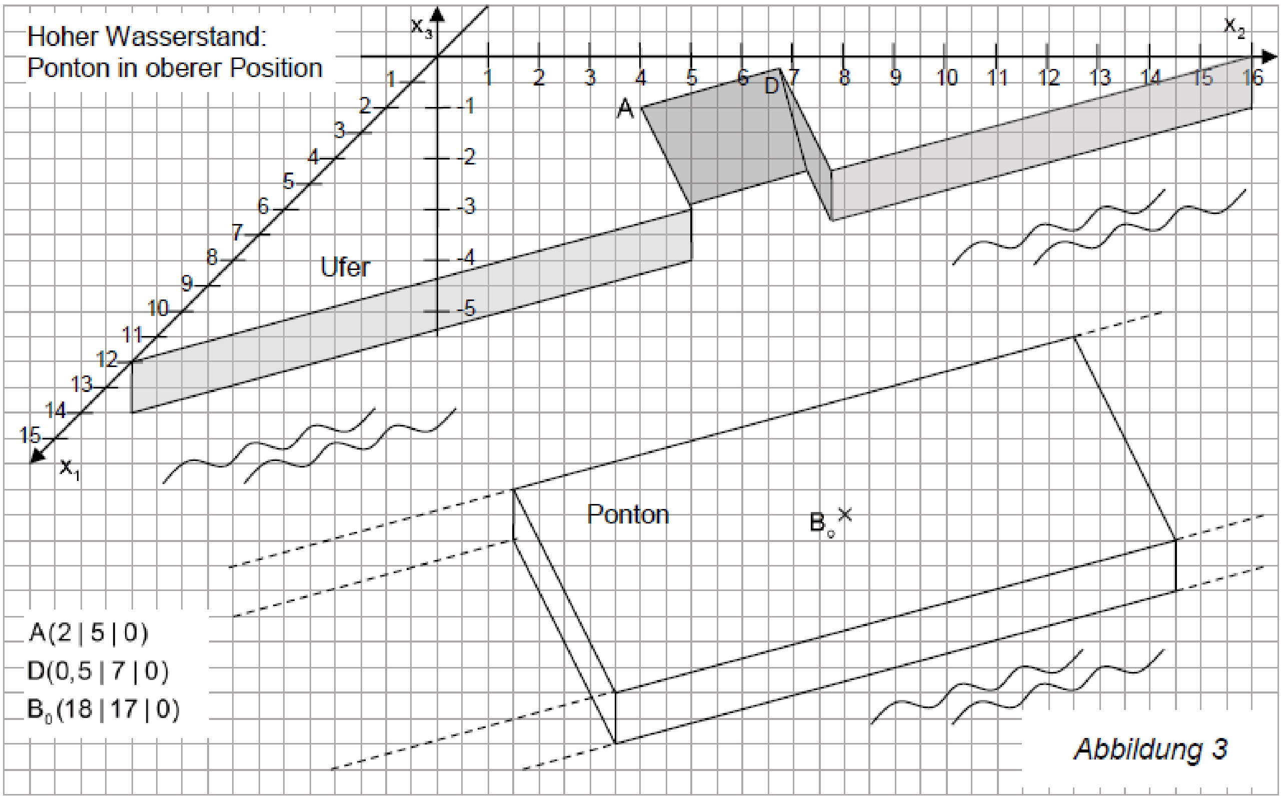


Abbildung 3

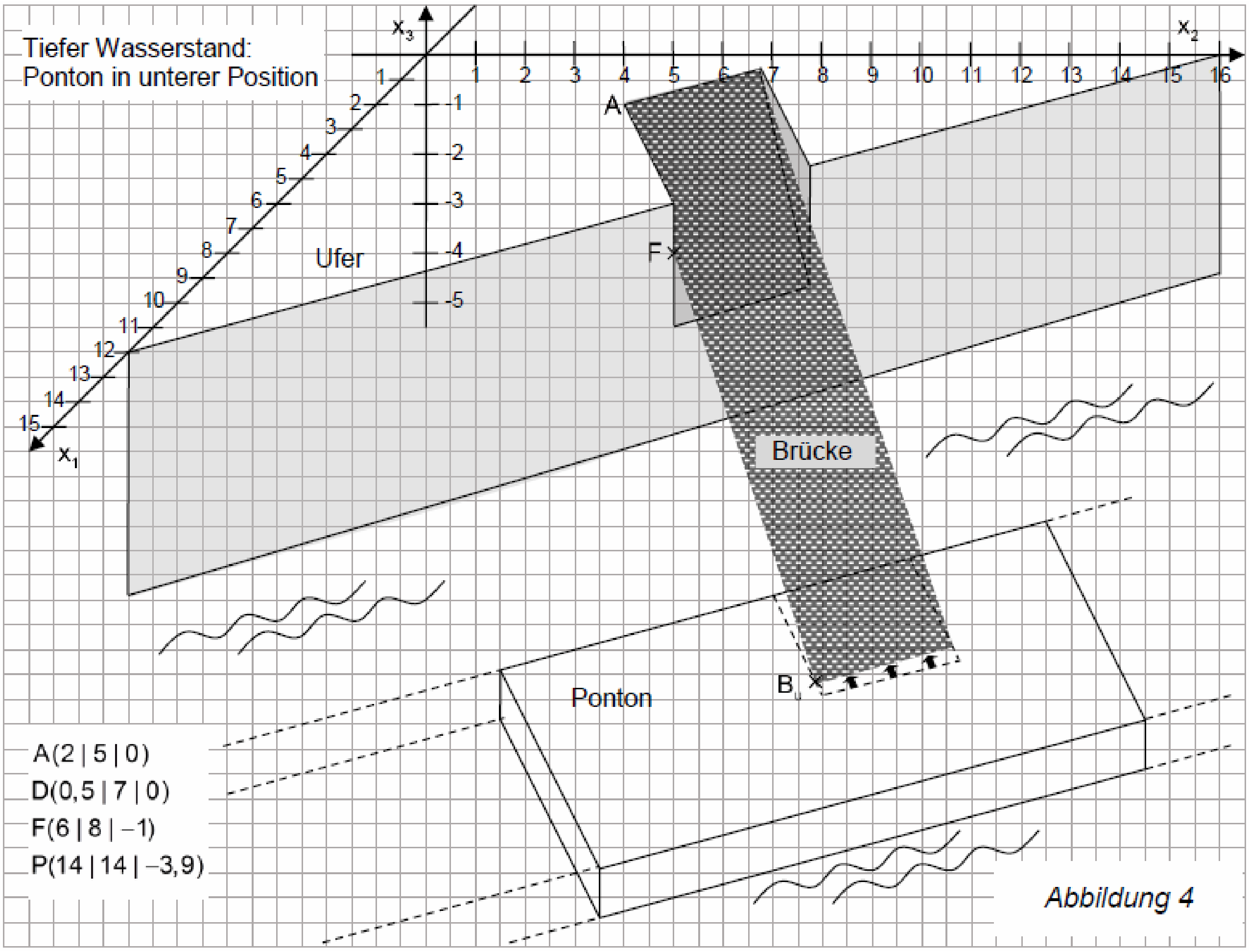


Abbildung 4

Teil 2 – Aufgabe 6 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik CAS

Bremer Hotels in der Vorweihnachtszeit

[Foto Bremer Marktplatz]

In der Vorweihnachtszeit übernachten viele Menschen in Bremer Hotels. Viele Zimmer in den Hotels werden daher frühzeitig reserviert. Einige werden jedoch kurzfristig wieder storniert, da die jeweiligen Gäste die Reise nach Bremen doch nicht antreten.

Erscheinen die jeweiligen Gäste, um ihr reserviertes Zimmer zu beziehen, so gilt die Reservierung als eingehalten. Im Folgenden ist davon auszugehen, dass 75% der Reservierungen eingehalten werden. Runden Sie berechnete Wahrscheinlichkeiten auf zwei Nachkommastellen oder geben Sie diese als ganzzahlige Prozentwerte an.

a) Ein kleines Hotel verfügt über 16 Zimmer. Alle Zimmer wurden für einen Tag in der Vorweihnachtszeit bereits frühzeitig reserviert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl eingehaltener Reservierungen an und ist binomialverteilt mit $p = 0{,}75$.

   Erläutern Sie, unter welchen Annahmen es gerechtfertigt ist, den Sachkontext mit einer Binomialverteilung zu modellieren.

   Geben Sie **an**, wie viele belegte Zimmer für diesen Tag zu erwarten sind.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zimmer nicht belegt wird.

   (6 Punkte)

b) Der Geschäftsführer des kleinen Hotels mit den 16 Zimmern plant die Einnahmen zu verbessern und nimmt 19 Reservierungen für diesen Tag an.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Plan des Geschäftsführers aufgeht. Dies ist der Fall, wenn genau 16 Reservierungen eingehalten werden.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Geschäftsführer mit seinem Plan Probleme bekommt, weil nicht ausreichend Zimmer zur Verfügung stehen.

   (4 Punkte)

c) Bei der Bremer Hotelkette „La Place" ist die Vorgehensweise, mehr Reservierungen anzunehmen als Zimmer vorhanden sind, ebenfalls üblich. Der Geschäftsführer eines Hotels der Kette hat dennoch den Eindruck, dass sein Hotel im letzten Jahr nicht gut ausgelastet war. Er nimmt an, dass dies an der hohen Anzahl kurzfristiger Stornierungen lag und will die Annahme, dass mindestens 75% der Reservierungen eingehalten werden, durch einen Hypothesentest prüfen. Bei 400 Reservierungen aus der Vorweihnachtszeit wird daher erfasst, ob sie eingehalten wurden.

   Geben Sie die zugehörige Nullhypothese H_0 sowie die passende Hypothese H_1 des Tests **an**.

   Ermitteln Sie bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ eine Entscheidungsregel und **entscheiden** Sie, ob 290 eingehaltene Reservierungen für eine niedrigere Wahrscheinlichkeit, eine Reservierung einzuhalten, sprechen.

   Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers 2. Art bei diesem Hypothesentest im Sachzusammenhang.

   Bestimmen Sie mithilfe von Anlage 1 oder Rechner für $p_1 = 0{,}7$ die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art.

   (11 Punkte)

d) Der Geschäftsführer des Hotels der Kette „La Place“ geht weiterhin davon aus, dass 75% der Reservierungen eingehalten werden. Er hat 192 Reservierungen für einen Tag in der Vorweihnachtszeit angenommen, verfügt aber lediglich über 147 Zimmer.

Eine Normalverteilung bietet, sofern für die Standardabweichung σ die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, eine gute Näherung für binomialverteilte Zufallsgrößen.

Zeigen Sie, dass die Laplace-Bedingung hier erfüllt ist.

Es gilt: $P(X \le k) \approx \Phi(z)$, wobei $z = \frac{k-\mu}{\sigma}$. D.h. über die Berechnung von z und mit der Tabelle zur Normalverteilung (siehe Anlage 2) kann $P(X \le k)$ näherungsweise bestimmt werden (μ Erwartungswert; σ Standardabweichung).

Bestimmen Sie $P(X \le 147)$ näherungsweise über die Normalverteilung und **erläutern** Sie die Bedeutung Ihres Ergebnisses im Sachzusammenhang.

Der Geschäftsführer verwendet für zukünftige Kalkulationen den Ansatz:

$$P(X > 147) = 1 - P(X \le 147) \approx 1 - \Phi\left(\frac{147 - 0{,}75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) = 0{,}01.$$

Interpretieren Sie, welches Ziel der Geschäftsführer mit seinem Ansatz verfolgt.

Der Ansatz lässt sich näherungsweise in die Gleichung $\frac{147 - 0{,}75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = 2{,}33$ überführen.

Geben Sie die Lösung der Gleichung **an** und **interpretieren** Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Begründen Sie mithilfe von Anlage 2, dass sich die Gleichung $\frac{147 - 0{,}75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = 2{,}33$ näherungsweise aus $1 - \Phi\left(\frac{147 - 0{,}75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) = 0{,}01$ folgern lässt.

(12 Punkte)

Bildnachweis: Jonas Ginter / Bremer Touristik Zentrale, http://www.bremen-tourismus.de/weihnachten-bremen (15.2.2016)

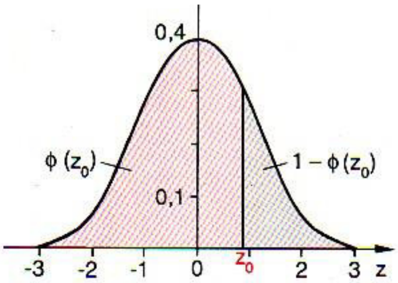
Anlage 1: Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung $B_{400;\,0,7}$

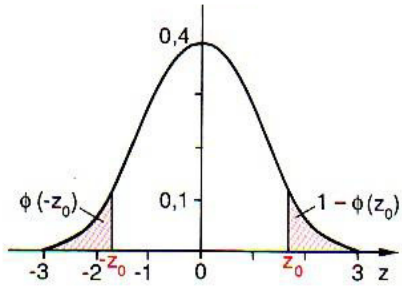
k	$P(x \le k)$	k	$P(x \le k)$	k	$P(x \le k)$	k	$P(x \le k)$	k	$P(x \le k)$	k	$P(x \le k)$
243	0,0000	**255**	0,0042	**267**	0,0872	**279**	0,4754	**291**	0,8960	**303**	0,9955
244	0,0001	**256**	0,0057	**268**	0,1055	**280**	0,5189	**292**	0,9148	**304**	0,9968
245	0,0001	**257**	0,0077	**269**	0,1264	**281**	0,5622	**293**	0,9309	**305**	0,9977
246	0,0002	**258**	0,0103	**270**	0,1501	**282**	0,6049	**294**	0,9445	**306**	0,9984
247	0,0003	**259**	0,0135	**271**	0,1766	**283**	0,6464	**295**	0,9560	**307**	0,9989
248	0,0004	**260**	0,0177	**272**	0,2059	**284**	0,6863	**296**	0,9655	**308**	0,9993
249	0,0005	**261**	0,0228	**273**	0,2380	**285**	0,7242	**297**	0,9732	**309**	0,9995
250	0,0008	**262**	0,0293	**274**	0,2727	**286**	0,7598	**298**	0,9795	**310**	0,9997
251	0,0011	**263**	0,0371	**275**	0,3098	**287**	0,7927	**299**	0,9845	**311**	0,9998
252	0,0016	**264**	0,0466	**276**	0,3490	**288**	0,8229	**300**	0,9884	**312**	0,9999
253	0,0022	**265**	0,0580	**277**	0,3899	**289**	0,8502	**301**	0,9914	**313**	0,9999
254	0,0031	**266**	0,0714	**278**	0,4322	**290**	0,8745	**302**	0,9937	**314**	0,9999

Für $k \le 243$ gilt $P(X \le k) \approx 0$, für $k \ge 315$ gilt $P(X \le k) \approx 1$.

Anlage 2: Tabelle zur Normalverteilung

Zur Angabe von $\Phi(z)$ ist zunächst die richtige Zeile der Tabelle, anschließend mit der zweiten Nachkommastelle die Spalte auszuwählen. Z.B. ist $\Phi(0{,}42) = 0{,}6628$ aus der Zeile zu 0,4 und der Spalte zu 2 abzulesen. Angegeben sind die Nachkommastellen von $\Phi(z)$. Es gilt außerdem: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Weitere Beispiele sind unterhalb der Tabelle angegeben.





z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Beispiele für den Gebrauch der Tabelle:

$\phi(2{,}37) = 0{,}9911$; $\phi(-2{,}37) = 1 - \phi(2{,}37) = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$;

$\phi(z) = 0{,}7910 \Rightarrow z = 0{,}81$; $\phi(z) = 0{,}2090 = 1 - 0{,}7910 \Rightarrow z = -0{,}81$