Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2014

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Dienstag, 29. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Bildung und Wissenschaft über die **Hotline (0421 …)** von 7.00 bis 9.30. Die von der Senatorin für Bildung und Wissenschaft vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

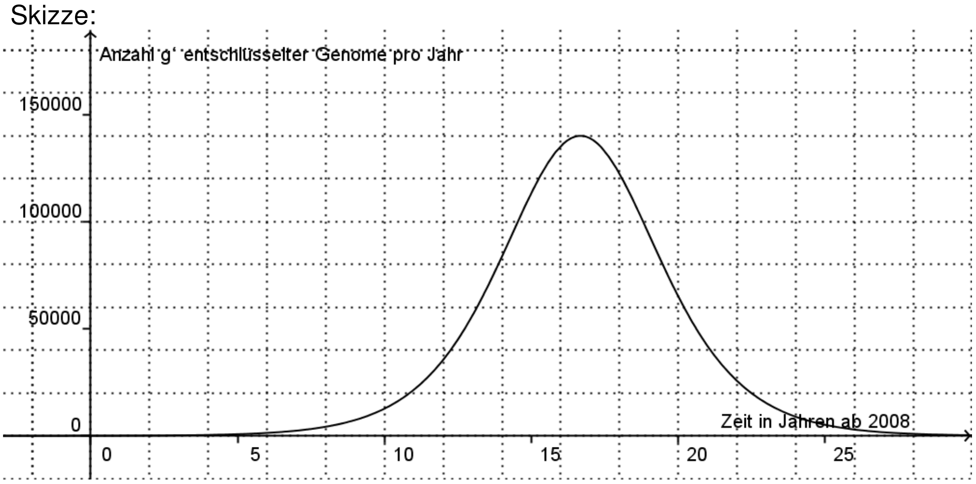
Die Bewertung der Prüfungsleistung

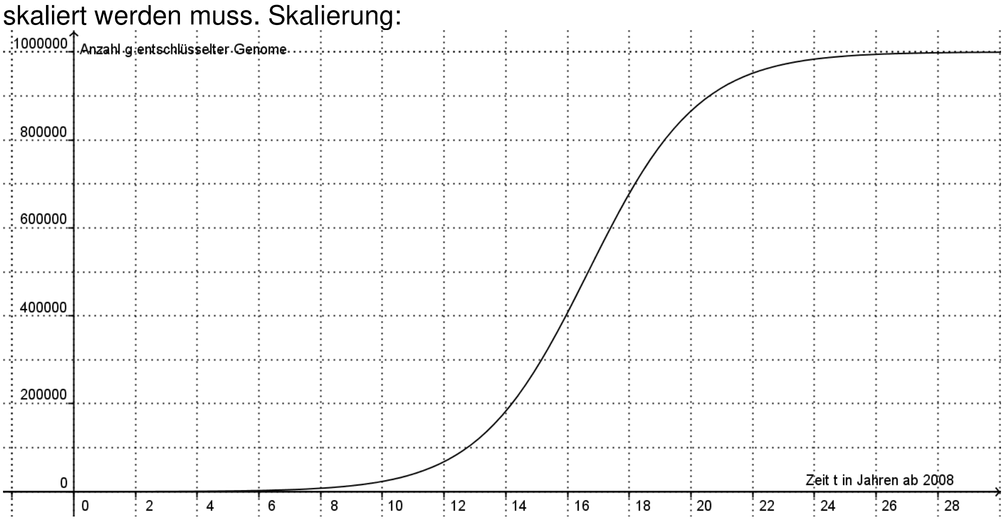
Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
0 bis 19,5	00
20 bis 26,5	01
27 bis 32,5	02
33 bis 39,5	03
40 bis 44,5	04
45 bis 49	05
49,5 bis 54	06
54,5 bis 59	07
59,5 bis 64	08
64,5 bis 69	09
69,5 bis 74	10
74,5 bis 79	11
79,5 bis 84	12
84,5 bis 89	13
89,5 bis 94	14
94,5 bis 99	15

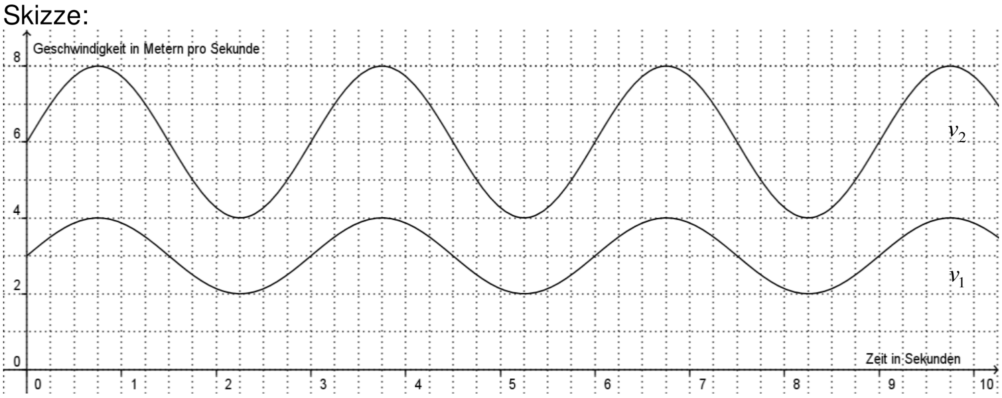
Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
a)	Durch Einsetzen der beiden Punkte erhält man die beiden Gleichungen: $f_1(4)=74\,000\,000 \Leftrightarrow a\cdot e^{-4k}=74\,000\,000 \quad \Leftrightarrow a=\frac{74\,000\,000}{e^{-4k}}$ $f_1(8)=2\,000\,000 \Leftrightarrow a\cdot e^{-8k}=2\,000\,000 \Leftrightarrow a=\frac{2\,000\,000}{e^{-8k}}$ Durch Gleichsetzen von a erhält man: $\frac{74\,000\,000}{e^{-4k}}=\frac{2\,000\,000}{e^{-8k}} \Leftrightarrow \frac{74\,000\,000}{2\,000\,000}=\frac{e^{-4k}}{e^{-8k}} \Leftrightarrow 37=e^{4k} \Leftrightarrow k=\frac{1}{4}\ln(37)\approx 0{,}90$ Durch Einsetzen von k erhält man: $a\cdot e^{-0{,}90\cdot 8}=2\,000\,000 \Leftrightarrow a=\frac{2\,000\,000}{e^{-7{,}2}}=2\,678\,861\,529$ Also folgt insgesamt $f_1(t)=2\,678\,861\,529\cdot e^{-0{,}9\cdot t}$.	3	3	
b)	Aus $f_2(t)=1\,000$ folgt $t\approx 4{,}3$. Dies entspricht vier Jahren und $0{,}3\cdot 12=3{,}6$ Monaten. Im April des Jahres 2012 wurde also die $1\,000$-Dollar-Marke geknackt. $f_2'(t)=-1{,}77\cdot 2\,000\,000\cdot e^{-1{,}77t}=-3\,540\,000\cdot e^{-1{,}77t}$ $f_2'(2)\approx -102\,707$ Der Wert bedeutet, dass die momentane Abnahme der Kosten am Anfang des Jahres 2010 ungefähr $102\,707$ USD pro Jahr betrug.	3	3	
c)	Da $g(0)\approx 88$ waren Anfang 2008 ca. 88 Genome entschlüsselt. Da $\lim\limits_{x\to\infty} g(t)=1\,000\,000$ ist, wird sich die Anzahl an weltweit entschlüsselten Genomen nach dieser Modellierung auf lange Sicht dem Wert $1\,000\,000$ annähern. Mit Quotienten- und Kettenregel ergibt sich: $g'(t)=\frac{0\cdot\left(1+11\,333\cdot e^{-0{,}56t}\right)-1\,000\,000\cdot(-0{,}56)\cdot 11\,333\cdot e^{-0{,}56t}}{\left(1+11\,333\cdot e^{-0{,}56t}\right)^2}$ $g'(t)=\frac{6\,346\,480\,000\cdot e^{-0{,}56t}}{\left(1+11\,333\cdot e^{-0{,}56t}\right)^2}$. Skizze:  			

<table>
<tr><td></td><td>Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Maximum-Berechnungsbefehls des Taschenrechners den Hochpunkt $H(16,67\,|\,140\,000)$.
Die Bedeutung des Hochpunktes ist die folgende: Der Zeitpunkt der maximalen Zunahme ist nach diesem Modell nach $16,67$ Jahren, das entspricht dem Jahr 2024.
Der Funktionswert der ersten Ableitung bedeutet, dass diese prognostizierte maximale Zunahme ca. $140\,000$ Genome pro Jahr betragen wird.
Mit Hilfe des Grenzwertes weiß man, dass die waagerechte Asymptote bei $1\,000\,000$ liegt und kann so die y-Achse in $100\,000$ er Schritten skalieren. Da der Wendepunkt beim logistischen Wachstum auf halber Höhe des Grenzwertes liegt, also hier bei $W(16,67\,|\,500\,000)$, weiß man, dass die x-Achse in Zweierschritten skaliert werden muss. Skalierung:


Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Integral-Berechnungs-Befehls des Taschenrechners: $I = \int_2^3 g'(t)\,dt \approx 203$.
Der Wert von I bedeutet, dass im Laufe des Jahres 2010 (bzw. von Anfang 2010 bis Anfang 2011) insgesamt 203 Genome entschlüsselt wurden.</td><td>7</td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Vorschlag B ist richtig. Die Funktion $g(t)$ gibt ja bereits die jeweils aktuelle Gesamtzahl an entschlüsselten Genomen an, insofern benötigt man $g'(t)$, um die zu einem Zeitpunkt entschlüsselte Anzahl an Genomen zu erhalten. Da $f_2(t)$ die momentanen Kosten für eine Genomentschlüsselung darstellt, berechnet man mit dem Produkt $g'(t) \cdot f_2(t)$ die momentanen Kosten für alle zu einem bestimmten Zeitpunkt entschlüsselten Genome. Um die Gesamtkosten zu erhalten, die über den Zeitraum von Anfang 2008 bis Anfang 2010 für die Entschlüsselung menschlicher Genome aufgewendet wurde, muss man das Integral von 0 bis 2 über dieses Produkt bestimmen.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Geschwindigkeit des Ruderbootes schwankt zwischen vier und acht Metern pro Sekunde. Für die Periode P gilt $P = 2\pi \cdot \frac{3}{2\pi} \Leftrightarrow P = 3$. Die Dauer einer vollständigen Ruderbewegung beträgt also drei Sekunden. Die Durchschnittsgeschwindigkeit während einer Periode beträgt sechs Meter pro Sekunde. Während einer vollständigen Ruderbewegung legt das Ruderboot $6 \cdot 3 = 18$ Meter zurück. Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Befehls zur Integralberechnung im Graphenmenü: $I = \int_0^{10} v_2(t)\,dt = \left[-\frac{3}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 6t\right]_0^{10} \approx 61,43$. Der Wert von I bedeutet, dass das Ruderboot innerhalb der ersten zehn Sekunden ca. $61,43$ Meter zurückgelegt hat. Wegen $\frac{1}{10}\int_0^{10} v_2(t)\,dt \approx 6,143$ beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten zehn Sekunden ca. $6,143$ Meter pro Sekunde. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Zeitpunkte ist es, die Hilfsfunktion h mit $h(x) = 6,143$ zu verwenden. Mit Hilfe des Befehls zur Schnittpunktberechnung von v_2 und h im Graphenmenü erhält man dann die beiden Werte $t_1 \approx 0,03$ und $t_2 \approx 1,47$.	6	4	
b)	$v_k(8) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1,5} \cdot 8\right) + 3k \approx 2,134k$. Der Wert bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Ruderbootes nach acht Sekunden ca. $2,134k$ Meter pro Sekunde beträgt. Skizze:  Der Graph von v_k mit $k = 1$ gehört zu einem weniger kräftig durchgeführten Training, derjenige mit $k = 2$ zu einem kräftigeren Training, weil bei letzterem zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit des Ruderbootes größer ist als beim ersten. $v_k´(t) = \frac{2\pi}{3}k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$ Der Ansatz $v_k´(t) = 0$ gibt die Lösung $t = 0,75$.			

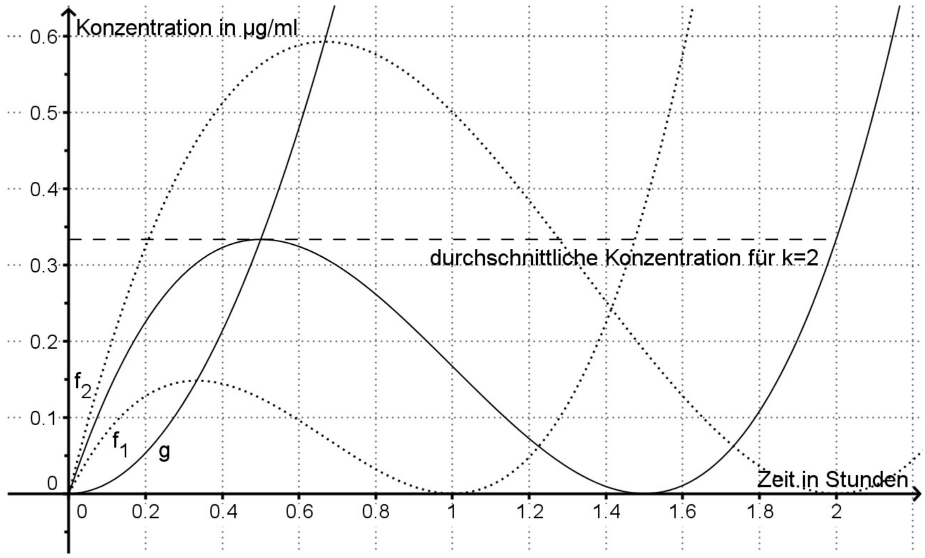
	Dass es sich um einen Hochpunkt handelt, kann mit verschiedenen Methoden gezeigt werden, z. B. mit $v_k''(t) = -\frac{4\pi^2}{9}k \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$ und wegen $v_k''(0,75) \approx -4,4k < 0$ ist bei $t = 0,75$ die Geschwindigkeit maximal. Da $P = 3$, liegen alle Maximalstellen bei $t_{\max} = 0,75 + 3n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $v_k(0,75) = 4k$ ist die maximale Geschwindigkeit $4k$ Meter pro Sekunde.	7	7	
c)	(Die im Folgenden verwendeten Parameter a, b, c und d beziehen sich auf die allgemeine Sinusfunktion $f(t) = a \cdot \sin(b(t-c)) + d$.) Da $P = \frac{2\pi}{b}$ und da der Wert von b bei g und v_2 gleich ist, ist die Periode bei beiden Graphen gleich und damit ist auch die Dauer einer vollständigen Ruderbewegung gleich. Da der Wert von a bei g nur halb so groß ist wie bei v_2, ist die Amplitude des Graphen von g nur halb so groß wie die von v_2 und damit ist die Differenz zwischen maximaler und minimaler Geschwindigkeit bei dem zu g gehörenden Ruderboot nur halb so groß wie bei dem zu v_2 gehörenden. Da der Wert von d bei g und v_2 gleich ist, ist die vertikale Verschiebung beider Graphen gleich und damit ist auch die Durchschnittsgeschwindigkeit während einer ganzen Periode bei beiden Ruderbooten gleich. Zum Beispiel erhält man mit Hilfe des Befehls zur Integralberechnung im Graphenmenü den Wert $\int_0^3 \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{1,5}\right) + 6\right)^3 dt \approx 756$ und bestimmt damit $E_{v_2} \approx 2,8 \cdot 756 \approx 2117$. Der Werte von E_g bedeutet, dass ein Ruderer von g innerhalb der ersten drei Sekunden ca. 1890 Joule verbraucht. Trotz gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit verbrauchen die Ruderer mit der stärker schwankenden Geschwindigkeit viel mehr Kalorien.		6	3
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Aus dem Text ergeben sich die Bedingungen $h(0,5)=\frac{1}{3}$, $h'(0,5)=0$, $h(0)=0$ und $h'(0)=1,5$.

Für $h(t)=at^3+bt^2+ct+d$ und $h'(t)=3at^2+2bt+c$ erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{rcl} 0,125a+0,25b+0,5c+d &=& \frac{1}{3}\\ 0,75a+b+c+d &=& 0\\ d &=& 0\\ c &=& 1,5 \end{array}\right|$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems erhält man: $a=\frac{2}{3}$; $b=-2$; $c=1,5$ und $d=0$. Damit ergibt sich $h(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+1,5t$.
</td><td>4</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>


Mithilfe des GTR ergibt sich $f'_{1,5}(1)=-0,5$.
Dies bedeutet, dass eine Stunde nach Beginn der Einnahme die Medikamentenkonzentration um $0,5\ \mu g/ml$ pro Stunde abnimmt.
Für einen sinnvollen Definitionsbereich sind die Nullstellen von f_k zu bestimmen.
Mit $f_k(t)=0$ ergeben sich die Nullstellen

$$\frac{1}{k}t\cdot\left(t^2-2kt+k^2\right)=0 \Leftrightarrow t_1=0 \vee t_2=-\frac{-2k}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2k}{2}\right)^2-k^2} \Leftrightarrow t_1=0 \vee t_2=k.$$

Ein im Sachkontext sinnvoller Definitionsbereich ist von den Nullstellen begrenzt, also $\left\{t\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\le t\le k\right\}$.
</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>c)</td><td>Es gilt: $f_k'(t)=\frac{3}{k}t^2-4t+k$ sowie $f_k''(t)=\frac{6}{k}t-4$.
Aus der notwendigen Bedingung mit $f_k'(t)=0$ ergeben sich $t_1=\frac{k}{3}$ und $t_2=k$ als mögliche Extremstellen.
Über die hinreichende Bedingung ergibt sich mit $f_k''(\frac{k}{3})=-2<0$, dass an der Stelle $t_1=\frac{k}{3}$ die Hochpunkte liegen.
Mit $f_k(\frac{k}{3})=\frac{4k^2}{27}$ ergibt sich $t=\frac{k}{3}$ als Zeitpunkt und $\frac{4k^2}{27}$ als Wert der maximalen Konzentration des Medikaments.
Mit $g(\frac{k}{3})=\frac{4k^2}{27}$ ist gezeigt, dass alle Hochpunkte von f_k auf dem Graphen von g liegen.
Skizze des Graphen von g siehe Koordinatensystem aus Aufgabenteil b).
Aus $g(t)=48$ ergibt sich $t=6$. Da $t=\frac{k}{3}$, ergibt sich als obere Grenze $k=18$.</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Eine Stammfunktion von f_k ist F_k mit $F_k(t)=\frac{1}{4k}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2$.
Es gilt: $\frac{1}{2-0}\int_0^2 f_k(t)dt=\frac{1}{2}\left[F_k(t)\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot\left(F_k(2)-F_k(0)\right)=\frac{2}{k}-\frac{8}{3}+k$
Die durchschnittlich vorhandene Konzentration von Beginn der Einnahme bis zu zwei Stunden nach der Einnahme beträgt $\frac{2}{k}-\frac{8}{3}+k$.
Die durchschnittlich vorhandene Konzentration in diesem Zeitintervall für $k=2$ beträgt $\frac{1}{3}$ $\mu g/ml$.
Veranschaulichung des Wertes siehe Koordinatensystem aus Aufgabenteil b).
$\frac{1}{x-0}\int_0^x f_k(t)dt=\frac{1}{x}\left[F_k(t)\right]_0^x=\frac{1}{x}\cdot\left(F_k(x)-F_k(0)\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{4k}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right)$
$=\frac{1}{4k}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{k}{2}x$
Die Funktionsgleichung $m_k(x)=\frac{1}{4k}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{k}{2}x$, gibt die durchschnittliche Konzentration von der Einnahme bis zu x Stunden nach der Einnahme des Medikamentes an.
Da als obere Grenze k gewählt wurde und k die Zeit angibt, bis zu der das Medikament im Blutplasma wieder vollständig abgebaut ist, gibt das Integral $\frac{1}{k}\int_0^k f_k(t)\,dt$ die durchschnittliche Konzentration des Medikamentes in $\mu g/ml$ im Blutplasma für die Wirkungszeit des Medikaments an. Da $3l=3000ml$, gibt
$M(k)=\frac{3000}{k}\int_0^k f_k(t)\,dt$ die durchschnittliche Menge des Medikamentes im Körper des Patienten in μg, während der Wirkungszeit an.</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Es gilt $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\2&1\end{pmatrix}$ sowie $C=\begin{pmatrix}1&1{,}5&1\\1&2&1\\2&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&7\\4&7\\5&4\end{pmatrix}$, wobei $c_{32}=7$ bedeutet, dass die Menü-Kombination *Großer Hunger* sieben ME *Käse* enthält. Wegen $C*\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\37\\40\\31\end{pmatrix}$ werden für die Bestellung 33 ME Brötchen, 37 ME Fleisch, 40 ME Käse und 31 ME Salat verarbeitet.	6	1	
b)	Wegen $\vec{y}=\begin{pmatrix}100-1-1-2\\50-1-0-1\\80-1-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\48\\76\end{pmatrix}$ können 96 Softdrinks, 48 Hamburger und 76 Portionen Pommes verkauft werden. Für die neue Input-Output-Tabelle gilt: <table><tr><td></td><td>Softdrink</td><td>Hamburger</td><td>Pommes</td><td>Konsum</td><td>Produktion</td></tr><tr><td>Softdrink</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>95</td><td>100</td></tr><tr><td>Hamburger</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>98</td><td>100</td></tr><tr><td>Pommes</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>74</td><td>80</td></tr></table> Da nun doppelt so viele Hamburger wie zuvor zubereitet werden, können auch mehr Hamburger verkauft werden. Die Hamburger bereiten jetzt zwei Angestellte zu, die nun auch doppelt so viele Softdrinks und Pommes-Portionen verzehren. Da deren Produktion nicht erhöht wurde, gehen also weniger Softdrinks und Pommes-Portionen an den Markt als zuvor. Es gilt: $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{100}&\frac{1}{50}&\frac{2}{80}\\\frac{1}{100}&\frac{0}{50}&\frac{1}{80}\\\frac{1}{100}&\frac{2}{50}&\frac{1}{80}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}01&0{,}02&0{,}0250\\0{,}01&0&0{,}0125\\0{,}01&0{,}04&0{,}0125\end{pmatrix}$. Die Einträge der dritten Spalte informieren über den Anteil an Softdrinks, Hamburgern und Pommes-Portionen, die der Mitarbeiter (theoretisch) bei der Zubereitung einer Portion Pommes verzehrt. Er trinkt $2{,}5\%$ eines Softdrinks, isst $1{,}25\%$ eines Hamburgers und verzehrt $1{,}25\%$ der Portion Pommes selbst.	4	4	

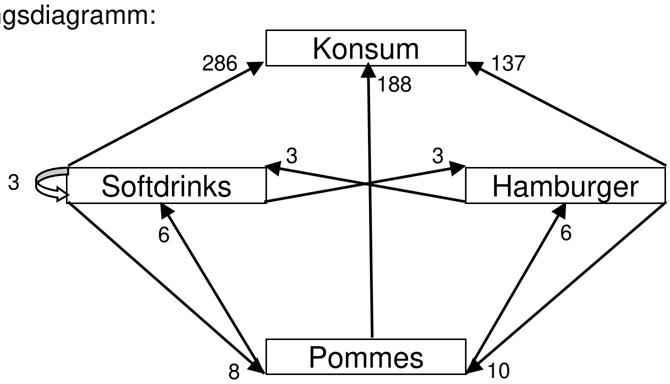
c)

$$(E-A)^{-1} * \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad (E-A)*(E-A)^{-1} * \vec{y} = (E-A)*\vec{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{y} = (E-A)*\vec{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{y} = \vec{x} - A*\vec{x}.$$

Die Gleichung bedeutet im Sachkontext, dass die mögliche Marktabgabe $\vec{y}$ die Differenz aus der Menge ist, die insgesamt an Softdrinks, Hamburgern und Pommes-Portionen zubereitet wird $\vec{x}$ und der Menge, welche die Angestellten von den drei Waren selbst verzehrt $A*\vec{x}$.

Wegen $(E-A)*\begin{pmatrix}300\\150\\200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}286\\137\\188\end{pmatrix}$ können 286 Softdrinks, 137 Hamburger und 188 Portionen Pommes an den Markt abgegeben werden.

Verflechtungsdiagramm:



Mit $\left(E-A\right)^{-1} \approx \begin{pmatrix}1,01 & 0,02 & 0,04\\0,01 & 1 & 0,05\\0,02 & 0,04 & 1\end{pmatrix}$ sowie $(E-A)^{-1} * \begin{pmatrix}2a\\a\\2a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\140\\x_3\end{pmatrix}$ wobei $a \geq 0$ die Anzahl an Hamburgern ist, die an den Markt abgegeben werden können, ergibt sich:

$$\left|\begin{matrix}2,02a+0,02a+0,08a & = & x_1\\0,02a+1,00a+0,10a & = & 140\\0,04a+0,04a+2,00a & = & x_3\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}2,12a & = & x_1\\1,12a & = & 140\\2,08a & = & x_3\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}x_1 & = & 265\\a & = & 125\\x_3 & = & 260\end{matrix}\right| \text{ und}$$

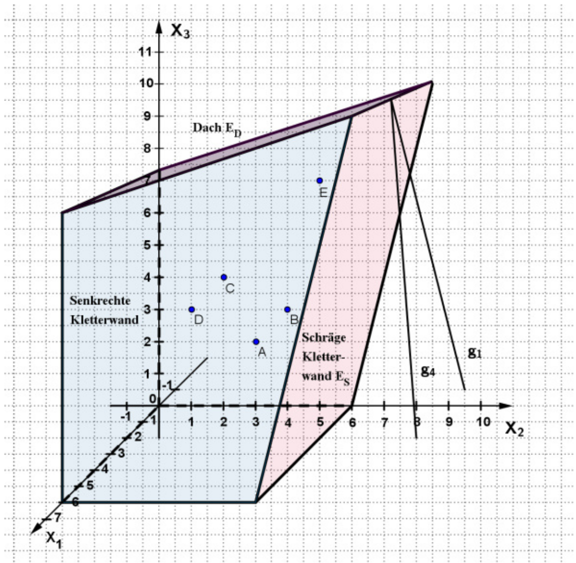
somit: $\vec{x} = \begin{pmatrix}265\\140\\260\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}250\\125\\250\end{pmatrix}$.

Es können pro Stunde also maximal etwa 250 Softdrinks, 125 Hamburger und 250 Portionen Pommes an den Markt abgegeben werden. Hierfür müssen 265 Softdrinks, 140 Hamburger und 260 Portionen Pommes zubereitet werden.

	I	II	III
c)	3	12	3
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>



Mit Z.B. $\overrightarrow{OD}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{DE}$ als Richtungsvektor ergibt sich

$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mit z.B. $\overrightarrow{OE}$ und $0{,}5 \cdot \overrightarrow{DE}$ folgt $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Z.B. ist zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ kein rechter Winkel, da

$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ gilt. Also ist das Viereck $ABCD$ kein Rechteck.

Mit $r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat das LGS $\begin{bmatrix} -2r + s = 2 \\ r + s = 5 \end{bmatrix}$

die Lösungen $r = 1$ und $s = 4$.

</td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Koeffizienten 0, -4, und 1 der Koordinatengleichung sind die Koordinaten eines Normalenvektors $\vec{n}$. Mit der Wahl von z.B. $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ergibt sich der Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{p}$ und $\vec{n}$ erhält man mit $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ eine Ebenengleichung in Normalenform von E_S.

Mit der Angabe von drei Punkten z.B. $P(0|0|-24)$, $Q(0|6|0)$ und $R(1|6|0)$, die nicht auf einer Geraden liegen, ergibt sich dann z.B. mit $E_S: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$

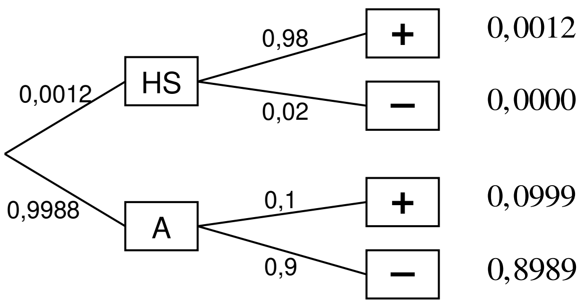
die Parameterform $E_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$.

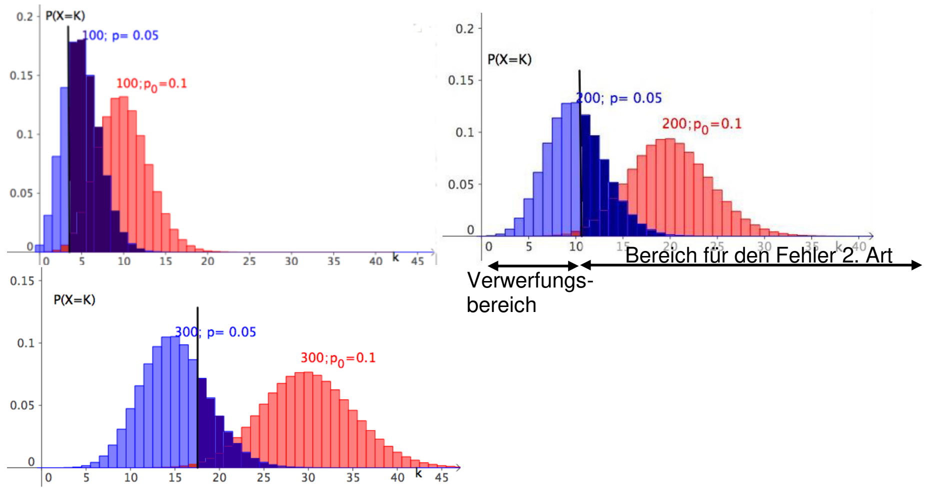
Eine mögliche Lösung ergibt sich z.B. mit dem linearen Gleichungssystem

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	$\begin{bmatrix} -11x_1 - 12x_2 + 36x_3 = 258 \\ -4x_2 + x_3 = -24 \end{bmatrix}$. Daraus folgt $x_3 = -24 + 4x_2$, $x_1 = -102 + 12x_2$ und $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich dann die Schnittgerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -102 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$. (Alternativ folgt mit $x_3 = t$: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.)	3	7	
c)	Der Vektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur x_1x_3- Ebene und der Vektor $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Ebene E_S .Es gilt dann $\cos(\alpha) = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \left\lvert \dfrac{-4}{\sqrt{17}} \right\rvert \approx 0{,}97,\ \alpha \approx 14^\circ$. Somit weicht die schräge Kletterwand um ca. 14° von einer senkrechten Wand ab.	2	1	
d)	Einzeichnen der Gerade $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}25 \\ 10 \end{pmatrix}$ s. a). Da die x_3- Koordinate vom Ortsvektor von g_a gleich 1 ist, ist der Punkt $P_a(a\,\vert\,10\,\vert\,1)$ der Punkt, in dem der Sichernde das Seil in einem Meter Höhe festhält. Eine mögliche Parameterform lautet: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1{,}25 \\ 10 \end{pmatrix};\ s,t \in \mathbb{R}$	1	2	1
e)	Eine mögliche Lösung: Bestimmung des Schnittpunkts von g_a und E_S: Mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3-a \\ -1{,}25 \\ 10 \end{pmatrix}$ ergeben sich die drei Gleichungen $x_1 = a + t \cdot (3-a)$, $x_2 = 10 - 1{,}25t$ und $x_3 = 1 + 10t$. Setzt man diese für x_1, x_2 und x_3 in E_S ein, so gilt $-4 \cdot (10 - 1{,}25t) + 1 + 10t = -24 \Leftrightarrow t = 1$. Durch Einsetzten von $t = 1$ in die Geradengleichung von g_a ergibt sich der Punkt $U(3\,\vert\,8{,}75\,\vert\,11)$. Also verlaufen alle Seile g_a durch den Punkt U , der in der schrägen Kletterwand E_S liegt. (Alternativ kann der Schnittpunkt der Geradenschar bestimmt werden und eine Punktprobe mit E_S erfolgen.)	1	2	2
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	**II**	**III**
a)	X: Anzahl der Neugeborenen mit einer beidseitigen Hörstörung, $n = 500$; $p = 0{,}0012$ X ist binomialverteilt, denn es gibt bei der Untersuchung eines Neugeborenen zwei Möglichkeiten (beidseitige Hörstörung / keine beidseitige Hörstörung) und die Wahrscheinlichkeit, dass das Neugeborene, das untersucht wird, unter einer beidseitigen Hörstörung leidet, bleibt bei jedem Neugeborenen gleich, da die Anzahl der Neugeborenen in der Stichprobe im Vergleich zur Anzahl der Neugeborenen in Deutschland insgesamt klein ist. $P(X = 0) = \binom{500}{0} \cdot 0{,}0012^0 \cdot 0{,}9988^{500} \approx 0{,}5486$ (oder mit Rechner-Notation) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}4514$	4	1	
b)	Baumdiagramm (auch ohne Wahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade):  HS: Hörstörung A: ausreichendes Hörvermögen + : positiver Befund – : negativer Befund $P(positiver Befund) = P(+) = 0{,}0012 \cdot 0{,}98 + 0{,}9988 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}1011$ $P(\textit{Kind mit auffälligem Messergebnis hat eine Hörstörung}) =$ $= \frac{0{,}0012 \cdot 0{,}98}{0{,}0012 \cdot 0{,}98 + 0{,}9988 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}0116$ $\frac{1}{30} = 0{,}0\bar{3}$; $\frac{1}{40} = 0{,}025$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind mit einem auffälligen Testergebnis tatsächlich eine Hörstörung hat, ist mit den Angaben über Spezifität und Sensitivität des Tests und der Erkrankungsrate von $0{,}12\%$ geringer als in dem Merkblatt für Eltern angegeben. Da die Wahrscheinlichkeit für eine beidseitige Hörstörung so gering ist und die Wahrscheinlichkeit, trotz ausreichendem Hörvermögen ein positives Testergebnis zu haben, 10% beträgt, also verhältnismäßig groß ist, gibt es sehr viel mehr falsch-positive als richtig-positive Ergebnisse.	5	6	1
c)	H_0: Das neue Messergebnis liefert nicht weniger falsch-positive Messergebnis als das alte Verfahren, also als kleinster Wert $p_0 = 0{,}1$ Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ Testgrößen: X : Anzahl der Kinder mit falsch-positivem Messergebnis X ist binomialverteilt mit $n = 100$; $p_0 = 0{,}1$ Zur Bestimmung des Verwerfungsbereichs für die Hypothese H_0 suchen wir das kleinste k für das gilt $P(X \leq k) \leq 1\%$ (linksseitiger Test, da $p_1 < 0{,}1$ vermutet wird):			

<table>
<tr><td></td><td>$P(X \le 4) = 0{,}0237 > 1\%$
$P(X \le 3) = 0{,}0078 < 1\%$
also ist der Verwerfungsbereich $V = \{0; \ldots ;3\}$.
Entscheidungsregel: Wenn unter den 100 Messergebnissen 3 oder weniger falsch-positive Messergebnisse sind, nehmen wir an, dass das neue Messverfahren weniger falsch-positive Messergebnisse als das alte Verfahren liefert.
Fehler 1. Art: Es wird angenommen, dass beim neuen Messverfahren weniger falsch-positive Messergebnisse entstehen, obwohl die Sensitivität des neuen Tests nicht besser ist als beim alten.
Fehler 2. Art: Es wird nicht angenommen, dass das neue Messverfahren weniger falsch-positive Messergebnisse liefert, obwohl die Sensitivität im neuen Test gegenüber dem alten verbessert wurde.
$p_1 = 0{,}05;\ n = 100;\ X$ wie oben; $P(X \ge 4) = 0{,}7422$</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Mit Rechner bestimmt man $V_{200} = \{0,\ldots,10\}$ und $V_{300} = \{0,\ldots,18\}$. Mit
$k_V = \mu - 2{,}326\sigma$ und $\mu = n \cdot 0{,}1;\ \sigma = \sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}$ berechnet man
$V_{200} = \{0,\ldots,10\}$ und $V_{300} = \{0,\ldots,17\}$, ggfs mit Stetigkeitskorrektur $V_{200} = \{0,\ldots,10\}$ und $V_{300} = \{0,\ldots,18\}$.
Eingezeichnet ist jeweils die Grenze zwischen Verwerfungsbereich (links) und dem Bereich, in dem H_1 nicht angenommen wird – also dem Bereich für einen möglichen Fehler 2. Art. Dunkel markiert sind jeweils die Säulen, die die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art repräsentieren.


Durch die Festsetzung des Signifikanzniveaus auf 1% wird der Fehler 1. Art unabhängig von der Stichprobengröße auf 1% begrenzt. Wird der Stichprobenumfang vergrößert, werden die (symmetrischen) Bereiche um den Erwartungswert, in denen z.B. 98% der Ergebnisse liegen, relativ zur Stichprobengröße kleiner. (Die Aussage: „Wächst n um den Faktor a , so wächst die Standardabweichung σ nur um den Faktor $\sqrt{a}$ “ wird nicht erwartet.) Dadurch überschneiden sich die Histogramme zu p_0 und $p_1 < p_0$ mit zunehmendem n weniger - der Test wird „trennschärfer“. Da der Bereich, in dem der Fehler 2. Art auftreten kann, genau die Komplementärmenge zum Verwerfungsbereich ist, wird der Fehler 2. Art geringer.</td><td></td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Schriftliche Abiturprüfung 2014

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Dienstag, 29. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Genomforschung

[Cartoon DNS-Molekül]

Unter einem Genom versteht man die gesamte Erbinformation eines Lebewesens. Es hat knapp zehn Jahre Forschung gebraucht, bis Anfang 2000 zum ersten Mal das Genom eines einzelnen Menschen entschlüsselt war. Die Kosten dieser Entschlüsselung betrugen ca. $2,7$ Milliarden U. S. Dollar. Seitdem wird die Entschlüsselung eines Genoms von Jahr zu Jahr günstiger und die Anzahl der entschlüsselten Genome verschiedener Menschen nimmt weltweit von Jahr zu Jahr zu.

a) Anfang 2004 kostete die Entschlüsselung eines Genoms $74\,000\,000$ USD (U.S. Dollar), Anfang 2008 waren es nur noch $2\,000\,000$ USD.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der beiden Angaben von 2004 und 2008 die Parameter a und k einer Exponentialfunktion f_1 mit $f_1(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$, wobei $f_1(t)$ die Kosten für die Entschlüsselung eines Genoms (in USD) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2000.

(6 Punkte)

b) Nachdem die Entschlüsselung eines Genoms Anfang 2008 noch $2\,000\,000$ USD kostete, haben neuere Geräte die Kostenentwicklung ab 2008 stark verändert. Die Kosten können ab 2008 mit der Funktion f_2 mit

$$f_2(t) = 2\,000\,000 \cdot e^{-1,77t} \text{ mit } t \geq 0$$

modelliert werden, wobei $f_2(t)$ die Kosten für die Entschlüsselung eines Genoms (in USD) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2008.

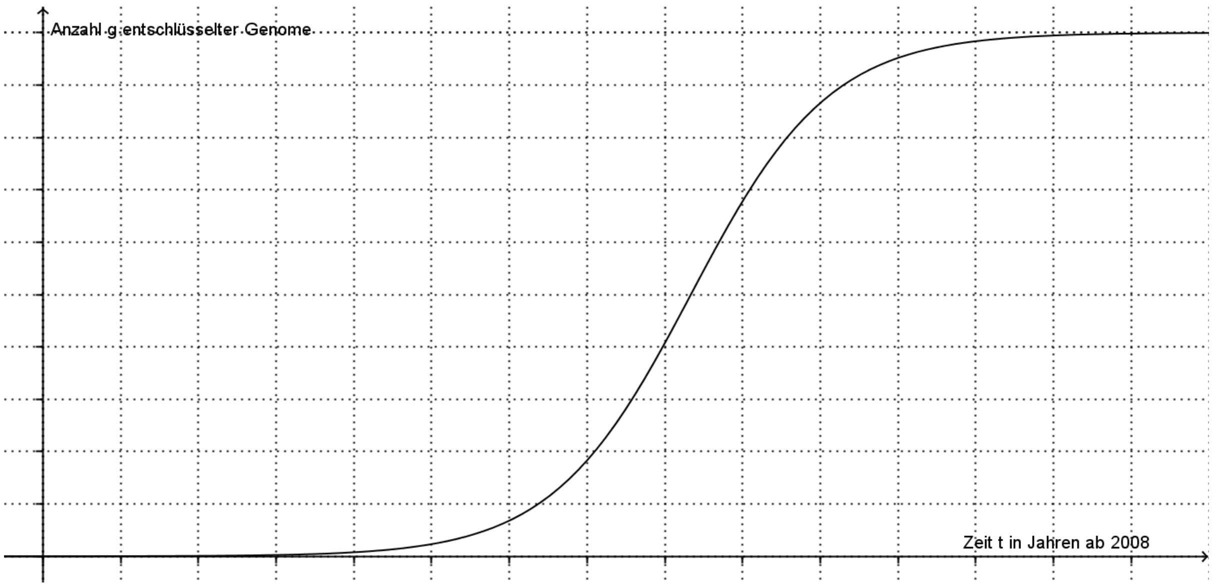
- In der Vergangenheit war es ein erklärtes Ziel, das „Tausend-Dollar-Genom“ zu bekommen. Bestimmen Sie das Jahr und den Monat, in dem die Entschlüsselung eines Genoms nur noch 1000 USD gekostet hat.
- Berechnen Sie den Wert von $f_2{}'(2)$.
- Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

c) In diesem Aufgabenteil geht es nicht mehr um die KOSTEN, sondern um die ANZAHL an entschlüsselten Genomen. Im Jahr 2000 gab es weltweit lediglich ein einziges menschliches Genom, das entschlüsselt war. Seitdem wurde das Genom von vielen weiteren Menschen entschlüsselt. Diese Anzahl kann mit der Funktion g mit

$$g(t) = \frac{1\,000\,000}{1 + 11\,333 \cdot e^{-0,56t}} \text{ mit } t \geq -8$$

modelliert werden, wobei $g(t)$ die Anzahl aller entschlüsselten menschlichen Genome in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) angibt. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Anfang des Jahres 2008. (s. nachfolgender Graph)



- Berechnen Sie, wie viele menschliche Genome weltweit Anfang 2008 entschlüsselt waren.
- Geben Sie an, wie sich die Anzahl an weltweit entschlüsselten Genomen nach dieser Modellierung auf lange Sicht entwickeln wird.
- Weisen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln nach, dass $g'(t) = \dfrac{6\,346\,480\,000 \cdot e^{-0,56t}}{\left(1 + 11\,333 \cdot e^{-0,56t}\right)^2}$ ist.
- Skizzieren Sie den Graphen von g' in einem eigenen Koordinatensystem im Bereich $0 \le t \le 30$.
- Bestimmen Sie den Hochpunkt von g'.
- Erläutern Sie die Bedeutung beider Koordinaten dieses Hochpunktes im Sachzusammenhang.
- Geben Sie unter Zuhilfenahme der bisherigen Ergebnisse passende Werte für die Markierungsstriche der Achsen in dem oberen Koordinatensystem an, in dem der Graph von g dargestellt ist.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_2^3 g'(t)\,dt$.
- Interpretieren Sie die Bedeutung von I im Sachzusammenhang.

(18 Punkte)

d) Es soll im Folgenden herausgefunden werden, wie viel Geld zwischen Anfang 2008 und Anfang 2010 für die Entschlüsselung von menschlichen Genomen aufgewendet wurde. Zur Berechnung dieses Wertes wurden drei verschiedene Vorschläge gemacht, wobei aber nur einer richtig ist.

Vorschlag A: $\int_0^2 f_2(t) \cdot g(t)\,dt$ Vorschlag B: $\int_0^2 f_2(t) \cdot g'(t)\,dt$ Vorschlag C: $\int_0^2 f_2'(t) \cdot g(t)\,dt$

- Entscheiden Sie sich für einen Vorschlag. Begründen Sie dabei entweder, warum der von Ihnen ausgewählte Vorschlag richtig ist, oder alternativ, warum die anderen beiden Vorschläge falsch sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis **GTR**

Rudern

[Foto Ruderboot]

Eine vollständige Ruderbewegung besteht aus zwei Phasen: In der ersten Phase tauchen die Ruderer ihre Ruder hinter sich ins Wasser und ziehen diese kräftig durch, dabei wird das Boot beschleunigt. Dann nehmen die Ruderer ihre Ruder aus dem Wasser heraus und führen sie wieder hinter sich. In dieser Phase wird das Boot langsamer. Durch diese Ruderbewegung schwankt die Geschwindigkeit des Bootes periodisch.

a) Die Geschwindigkeit bei einer Fahrt mit einem Ruderboot kann mit der Funktion v_2 mit

$$v_2(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right) + 6 \text{ mit } t \geq 0$$

modelliert werden, wobei t die Zeit in Sekunden (s) und $v_2(t)$ die Geschwindigkeit des Bootes in Metern pro Sekunde (m/s) angibt. Im Anhang 1 ist der Graph von v_2 abgebildet.

- Geben Sie den höchsten und den niedrigsten Wert an, zwischen denen die Geschwindigkeit des Ruderbootes schwankt.
- Berechnen Sie die Dauer einer vollständigen Ruderbewegung.
- Geben Sie die mittlere Geschwindigkeit des Ruderbootes während einer vollständigen Ruderbewegung an.
- Bestimmen Sie ohne Integralrechnung, wie viele Meter das Ruderboot während einer vollständigen Ruderbewegung zurücklegt.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_0^{10} v_2(t)\, dt$.
- Interpretieren Sie den Wert von I im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ruderbootes innerhalb der ersten 10 Sekunden.
- Bestimmen Sie alle Zeitpunkte t innerhalb des Intervalls $[0; 3]$, zu denen das Ruderboot eine Geschwindigkeit von $6{,}143$ Metern pro Sekunde besitzt.

(10 Punkte)

b) Unterschiedlich schnelle Fahrten in diesem Ruderboot können mit der Funktionsschar v_k mit

$$v_k(t) = k \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right) + 3k \text{ mit } 1 \leq k \leq 2$$

modelliert werden, wobei wieder t die Zeit in Sekunden (s) und $v_k(t)$ die Geschwindigkeit des Bootes in Metern pro Sekunde (m/s) angibt.

- Berechnen Sie $v_k(8)$ in Abhängigkeit von k .
- Erläutern Sie die Bedeutung des gefundenen Ergebnisses im Sachzusammenhang.
- Skizzieren Sie den Graphen der Schar, der zu v_1 gehört, in das Koordinatensystem im Anhang 1, in dem bereits der Graph von v_2 dargestellt ist.

- Entscheiden und begründen Sie, welcher der beiden Graphen zu einem Training gehört, bei dem kräftiger gerudert wird und welcher zu einem Training gehört, bei dem weniger kräftig gerudert wird.
- Ermitteln Sie $v_k'(t)$ mit Hilfe der Ableitungsregeln.
- Bestimmen Sie alle Zeitpunkte $t \geq 0$ in Abhängigkeit von k, zu denen das Ruderboot seine maximale Geschwindigkeit erreicht.
- Geben Sie diese maximale Geschwindigkeit in Abhängigkeit von k an.

(14 Punkte)

c) Ein Ruderboot, das mit einer anderen Technik gerudert wird, erzielt eine andere Geschwindigkeitskurve, die mit der Funktion g mit

$$g(t) = \sin\left(\frac{\pi}{1{,}5} \cdot t\right) + 6$$

modelliert werden kann, wobei t wieder die Zeit in Sekunden (s) und $g(t)$ die Geschwindigkeit des Bootes in Metern pro Sekunde (m/s) angibt. Im Anhang 2 ist der dazu gehörende Graph abgebildet.

- Vergleichen Sie bei den Funktionstermen von v_2 und g Periode, Amplitude sowie vertikale Verschiebung des Graphen.
- Interpretieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede, die sich beim Vergleich ergeben, im Sachzusammenhang.

Im Folgenden geht es um den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Ruderbootes und der Energie, die ein Ruderer erbringen muss. Eine mögliche Näherung, mit der man aus der Geschwindigkeitsfunktion f eines Ruderbootes die Energie berechnen kann, die ein Ruderer erbringen muss, ist die folgende:

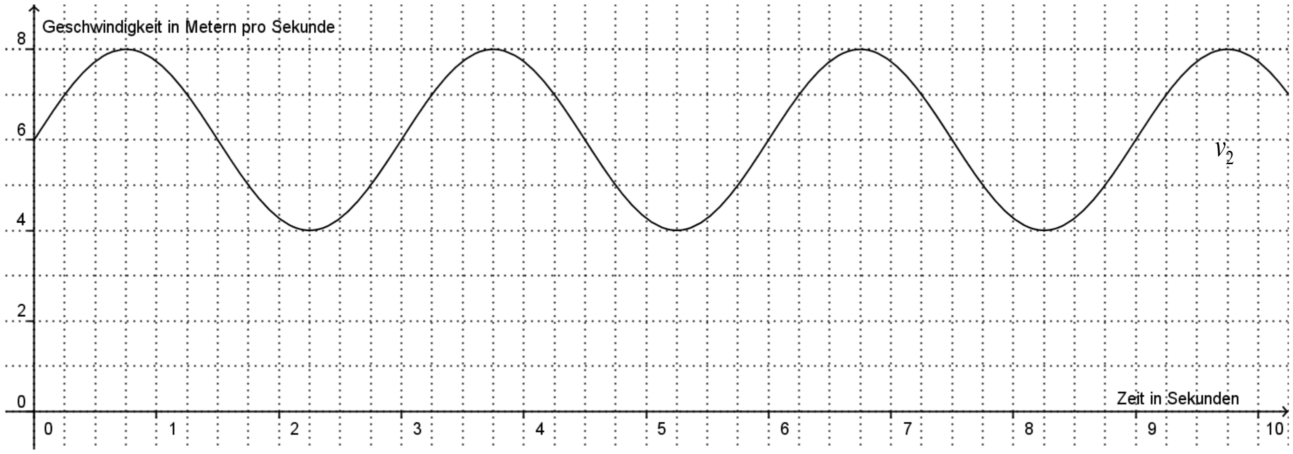
$$E_f = 2{,}8 \cdot \int_a^b \left(f(t)\right)^3 dt$$

Dabei gibt E den Energieverbrauch in Joule (J) an, $f(t)$ ist eine beliebige Geschwindigkeitsfunktion eines Ruderbootes in Metern pro Sekunde (m/s) und das Intervall $[a; b]$ gibt das betrachtete Zeitintervall in Sekunden (s) an. Bekannt ist das folgende Ergebnis: $E_g = 2{,}8 \cdot \int_0^3 \left(g(t)\right)^3 dt \approx 1890$.

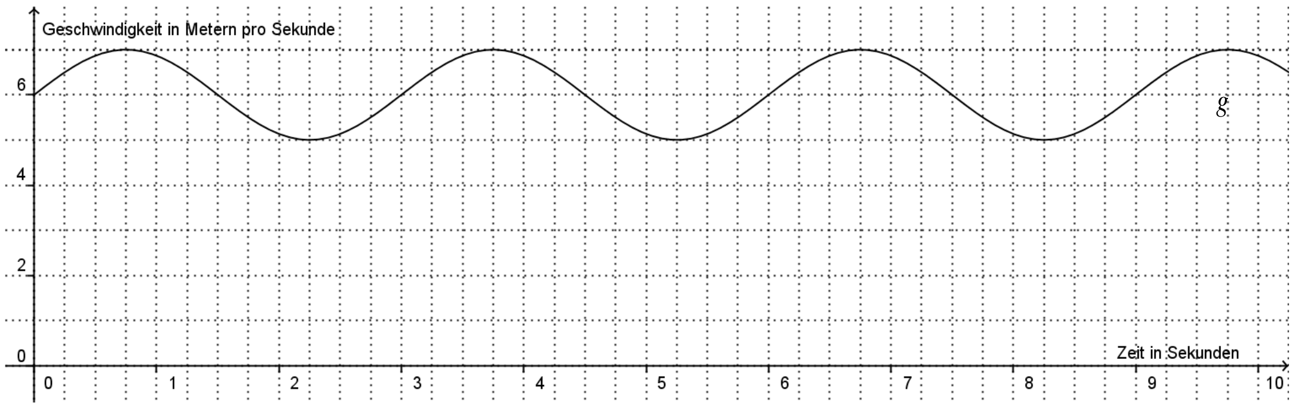
- Bestimmen Sie den Wert von E_{v_2}, wobei $E_{v_2} = 2{,}8 \cdot \int_0^3 \left(v_2(t)\right)^3 dt$.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes von E_g im Sachzusammenhang.
- Vergleichen Sie die Werte von E_g und E_{v_2} in Bezug auf den Sachzusammenhang.

(9 Punkte)

Anhang 1



Anhang 2



Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Medikamentenkonzentration

Um eine möglichst lange Wirkungsdauer von Medikamenten zu erreichen, werden in der Medizin spezielle Tabletten oder Kapseln genutzt, die den Wirkstoff verlangsamt freisetzen. Bei der Entwicklung eines solchen Medikaments ist es sinnvoll, die Konzentration eines Medikamentes in Mikrogramm pro Milliliter ($\mu g/ml$) im Blutplasma (Blutflüssigkeit) zu untersuchen.

a) Über ein neu entwickeltes Medikament ist bekannt, dass eine halbe Stunde nach der Einnahme die maximale Konzentration von $\frac{1}{3}\ \mu g/ml$ im Blutplasma erreicht ist. Zu Beginn der Einnahme ist das Medikament nicht nachweisbar, d.h. die Konzentration beträgt $0\ \mu g/ml$. Die momentane Änderungsrate der Konzentration beträgt zu diesem Zeitpunkt $1{,}5\ \mu g/ml$ pro Stunde.

- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion h dritten Grades, die den dargestellten Sachverhalt beschreibt. t gibt dabei die Zeit in Stunden nach der Einnahme an und $h(t)$ die Konzentration des Medikamentes im Blutplasma in $\mu g/ml$. Eine anschließende Überprüfung, ob die bestimmte Funktion h die obigen Angaben erfüllt, ist nicht notwendig.

(7 Punkte)

Das Medikament kann in unterschiedlichen Dosen verabreicht werden. Abhängig von der Dosismenge, lässt sich die Konzentration des Medikamentes $f_k(t)$ in $\mu g/ml$ im Blutplasma in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden mit

$$f_k(t) = \frac{1}{k}t^3 - 2t^2 + kt \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}\,;\ k > 0$$

beschreiben. k berücksichtigt dabei die Abhängigkeit von der Dosismenge.

b)

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f_{1,5}$ für $0 \le t \le 2$ in das beiliegende Koordinatensystem. Die Graphen von f_1 und f_2 sind bereits dargestellt.
- Bestimmen Sie $f_{1,5}'(1)$ und erläutern Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Die Funktion f_k ist eine sinnvolle Modellierung, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

- Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung die Nullstellen von f_k. Zur Kontrolle: $t_1 = 0$ und $t_2 = k$.
- Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich für f_k an.

(7 Punkte)

c) Für die Verabreichung des Medikamentes ist es wichtig, dass eine bestimmte Konzentration im Blut nicht überschritten wird, da dies schädlich für den Patienten ist.

- Bestimmen Sie Zeitpunkt und Wert der maximalen Konzentration des Medikamentes in Abhängigkeit von k. Zur Kontrolle: $H_k\left(\frac{k}{3}\middle|\frac{4k^2}{27}\right)$.
- Zeigen Sie, dass alle Hochpunkte der Kurvenschar f_k auf dem Graphen der Funktion g mit $g(t) = \frac{4}{3}t^2$ liegen.
- Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von g für $0 \le t \le 0{,}7$ in das beiliegende Koordinatensystem.

Bei einer Konzentration von mehr als $48\ \mu g/ml$ ist das Medikament schädlich für den Patienten.

- Berechnen Sie, welcher maximale Wert aus diesem Grund für k festgelegt werden sollte.

(10 Punkte)

d)

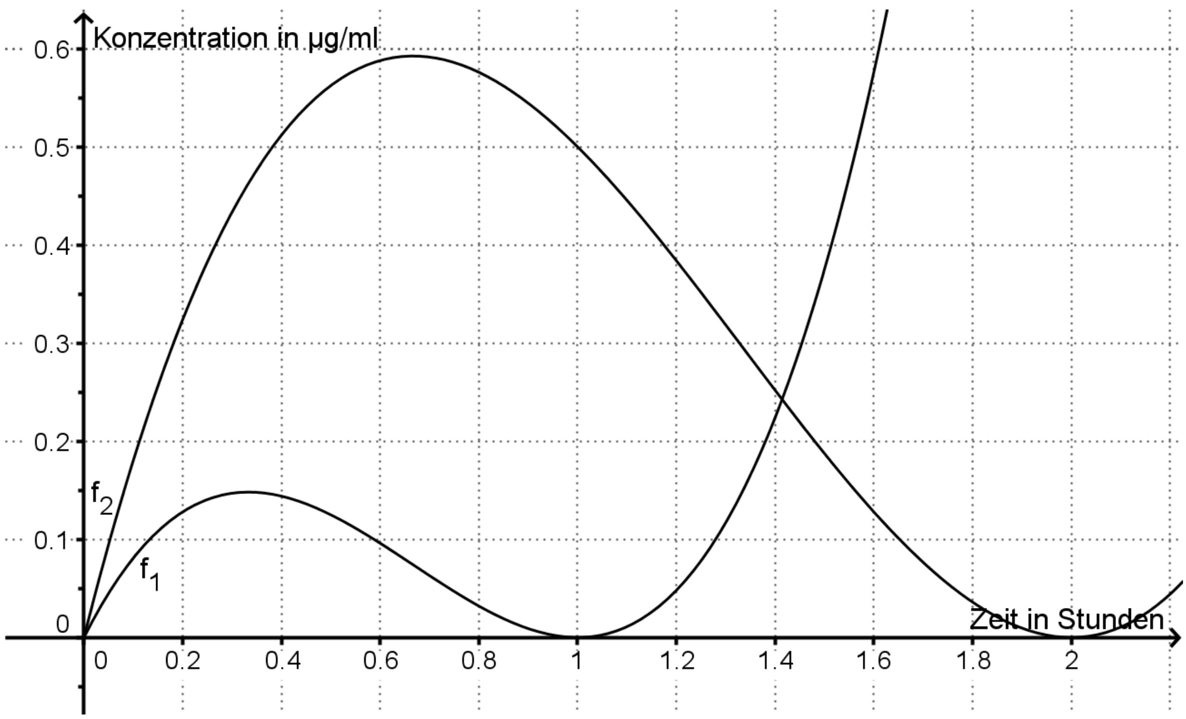
- Bestimmen Sie den Wert der durchschnittlich vorhandenen Konzentration in $\mu g/ml$ im Blutplasma in Abhängigkeit von k von Beginn der Einnahme bis zwei Stunden nach der Einnahme.
- Bestimmen Sie diesen Wert für $k=2$ und veranschaulichen Sie diesen Wert im beiliegenden Koordinatensystem.
- Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion an, welche die durchschnittliche Konzentration von Beginn der Einnahme bis zu x Stunden nach der Einnahme des Medikamentes in $\mu g/ml$ angibt.

Im Normalfall hat ein Mensch ungefähr drei Liter Blutplasma im Körper.

- Erläutern Sie die Bedeutung von $M(k)=\frac{3000}{k}\int_0^k f_k(t)\,dt$ im Sachzusammenhang, ohne diesen Wert zu berechnen. Berücksichtigen Sie dabei, dass $t_1=0$ und $t_2=k$ Nullstellen des Graphen von f_k sind.

(9 Punkte)

Anlage:



Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra **GTR**

Fast Food

[Grafik Hamburger]

Ein Fast-Food-Restaurant verkauft Softdrinks, Hamburger und Pommes Frites.

Im Restaurant werden aus den vier Rohstoffen
1) *Brötchen*
2) *Fleisch*
3) Käse
4) Salat

die drei verschiedenen Sorten Hamburger
1) *Double-Cheese*
2) *Magic-Beef*
3) Green-Wonder

zubereitet.

Die Hamburger lassen sich in zwei Menü-Kombinationen bestellen:
Die Kombination
1) *Kleiner Hunger* enthält einen *Double-Cheese* und zwei *Green-Wonder*,
während die Zusammenstellung
2) *Großer Hunger* aus zwei *Double-Cheese*, zwei *Magic-Beef* und einem *Green-Wonder*
besteht.

Bitte behalten Sie die Reihenfolge der verschiedenen Waren stets bei.

a) Die Prozessmatrix H informiert darüber, wie sich die drei verschiedenen Hamburgersorten aus den vier Rohstoffen in Mengeneinheiten (ME) zusammensetzen.

Es gilt $H = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, wobei die Reihenfolge der Waren den obigen Nummerierungen folgt.

- Geben Sie die Prozessmatrix M an, die darüber informiert, wie sich die zwei Menü-Kombinationen aus den drei Hamburgersorten zusammensetzen.
- Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Prozessmatrix C mit $C = H * M$ gilt: $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.
- Erläutern Sie die Bedeutung des Matrixeintrages c_{32} im Sachzusammenhang.

In der Pause bestellt der Mathematik-Leistungskurs einer nahe dem Restaurant gelegenen Gymnasialen Oberstufe 3 Menü-Kombinationen der Sorte *Kleiner Hunger* und 4 der Sorte *Großer Hunger*.

- Berechnen Sie mit Hilfe von Matrix-Vektoroperationen, wie viele Mengeneinheiten von den vier Rohstoffen für die Bestellung nötig sind.

(7 Punkte)

Die Zubereitung von Softdrinks, Hamburgern und Pommes-Portionen soll nun als Produktion des Fast Food-Restaurants aufgefasst werden.

Um die Zubereitung der drei verschiedenen Waren kümmert sich jeweils ein Angestellter. Während einer Schicht können die Angestellten sich auch selber von Softdrinks, Hamburgern und Pommes-Portionen verpflegen. Die Situation lässt sich daher mit Hilfe des Leontief-Modells modellieren.

b) Die folgende Input-Output-Tabelle informiert über den Eigenverzehr sowie über die Gesamtproduktion der drei Waren in einer speziellen Schicht am Sonntagvormittag.

verzehrt	Angestellter im Bereich Softdrinks	Angestellter im Bereich Hamburger	Angestellter im Bereich Pommes	Markt-abgabe	Gesamt-produktion
Softdrinks	1	1	2		100
Hamburger	1	0	1		50
Pommes	1	2	1		80

- Berechnen Sie, wie viele Softdrinks, Hamburger und Pommes-Portionen während einer Schicht an die Kunden verkauft werden können und tragen Sie Ihre Ergebnisse in der Spalte *Marktabgabe* ein.
- Geben Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle an, wenn aufgrund einer erhöhten Nachfrage am Sonntagvormittag doppelt so viele Hamburger wie zuvor zubereitet werden sollen und hierfür ein weiterer Mitarbeiter eingestellt wird, der sich genauso wie der erfahrene Angestellte verpflegt.
- Erklären Sie, warum nun zwar mehr Hamburger aber weniger Softdrinks und Pommes-Portionen an die Kunden verkauft werden können.
- Bestimmen Sie die Technologiematrix T zu der oben angegebenen Input-Output-Tabelle.
- Erläutern Sie die Bedeutung der dritten Spalte von T im Sachkontext.

(8 Punkte)

c) Der Firmenleitung sind die Leontief-Inverse $\left(E-A\right)^{-1}$, der Gesamtproduktionsvektor $\vec{x}$ sowie der Marktabgabevektor $\vec{y}$ bekannt, die zu einer zweiten Filiale der Fast Food-Kette gehören.

- Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck $(E-A)^{-1} * \vec{y} = \vec{x}$ in $\vec{y} = \vec{x} - A * \vec{x}$ umformen lässt.
- Erläutern Sie die Bedeutung der Gleichung $\vec{y} = \vec{x} - A * \vec{x}$ im Sachzusammenhang.

Arbeiten Sie nun bitte mit $A = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0 \end{pmatrix}$ weiter.

Die Firmenleitung fordert, dass in jeder Schicht mindestens 300 Softdrinks, 150 Hamburger und 200 Portionen Pommes zubereitet werden.

- Berechnen Sie, welche Warenmengen jeweils an den Markt abgegeben werden können.
- Erstellen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.

Für das neue Quartal plant die Firmenleitung eine stündliche Marktabgabe der einzelnen Warentypen im Verhältnis von $2:1:2$, wobei maximal 140 Hamburger zubereitet werden können.

- Ermitteln Sie mit Hilfe der Leontief-Inversen $\left(E-A\right)^{-1}$ die maximal erzielbaren Marktabgaben der drei Abteilungen sowie die hierfür erforderlichen Gesamtproduktionen. Runden Sie die Matrixeinträge gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen und Ihre Ergebnisse auf ganze Zahlen!

(18 Punkte)

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

GTR

Kletterturm

[Foto Kletterturm]

Bei einem Kletterturm kann man, abgesichert von Seilen und mit Hilfe von Griffen, an senkrechten und schrägen Kletterwänden verschiedene Kletterstrecken bewältigen. Die Griffe können durch Punkte und die Kletterstrecken durch Vektoren beschrieben werden. Die Seile zum Sichern der Kletterer können als Ausschnitte von Geraden und die Kletterwände als Ausschnitte von Ebenen modelliert werden. Das vereinfachte Modell eines Kletterturms setzt sich aus einem Dach, drei senkrechten und einer schrägen Kletterwand zusammen (vgl. Abb.1). Die x_1x_2- Ebene beschreibt den Erdboden und die x_3- Achse zeigt senkrecht in Richtung Himmel.

Die Koordinateneinheit ist ein Meter.

In der vorderen senkrechten Kletterwand werden fünf Griffe durch die Punkte $A(6|6|5)$, $B(6|7|6)$, $C(6|5|7)$, $D(6|4|6)$ und $E(6|8|10)$ beschrieben.

a)

- Zeichnen Sie die Punkte A, B, C und D in das Koordinatensystem in Abb.1 ein. (Dort ist schon der Punkt E eingetragen).

Eine Kletterstrecke von D nach E verläuft entlang einer Geraden.

- Bestimmen Sie zwei unterschiedliche Gleichungen der Geraden, entlang derer diese Kletterstrecke verläuft.

Die Griffe A, B, C und D sind die Eckpunkte des Vierecks $ABCD$.

- Untersuchen Sie, ob Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Eine Kletterstrecke von A nach E wird durch die Gleichung $r \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$ beschrieben.

- Bestimmen Sie rechnerisch $r, s \in \mathbb{R}$ so, dass die obige Gleichung gilt.

(11 Punkte)

Das Dach des Kletterturms wird durch $E_D: -11x_1 - 12x_2 + 36x_3 = 258$ und die schräge Kletterwand durch $E_S: -4x_2 + x_3 = -24$ beschrieben.

b)

- Bestimmen Sie von E_S eine Ebenengleichung in Normalenform.
- Bestimmen Sie von E_S eine Ebengleichung in Parameterform.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden h vom Dach E_D und der schrägen Kletterwand E_S.

(10 Punkte)

c) Die schräge Kletterwand E_S ist im Vergleich zu einer senkrechten Wand, welche parallel zur x_1x_3- Ebene verläuft, geneigt.

- Berechnen Sie den Winkel, um den die schräge Kletterwand von solch einer senkrechten Wand abweicht.

(3 Punkte)

Ein Kletterer klettert nun an der schrägen Kletterwand und wird über einen Umlenkhaken mit einem Seil von einem Sichernden gesichert (vgl. Abb.2). Der Sichernde steht dabei auf dem Boden. Wenn der Sichernde seine Position verändert, ergibt sich ein unterschiedlicher Verlauf des Seils vom Sichernden zum Umlenkhaken.

Der Verlauf des Seils kann dann durch den Ausschnitt einer Geradenschar

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3-a \\ -1,25 \\ 10 \end{pmatrix}$; $t, a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Ein Ausschnitt der Geraden g_1 ist in das Koordinatensystem von Abb.1 eingezeichnet.

d)

- Zeichnen Sie für $a = 4$, die Gerade g_4 für $0 \leq t \leq 1$ in das Koordinatensystem in Abb.1 ein.
- Geben Sie den Punkt P_a an, in dem der Sichernde das Seil in einem Meter Höhe festhält.
- Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameterform an, in der die Geradenschar g_a liegt.

(4 Punkte)

e) Das Seil g_a verläuft durch den Umlenkhaken U.

- Zeigen Sie, dass alle Geraden der Geradenschar g_a denselben Schnittpunkt U mit der Ebene E_S haben.
- Geben Sie die Koordinaten von U an.

(5 Punkte)

Material zur Aufgabe Kletterturm

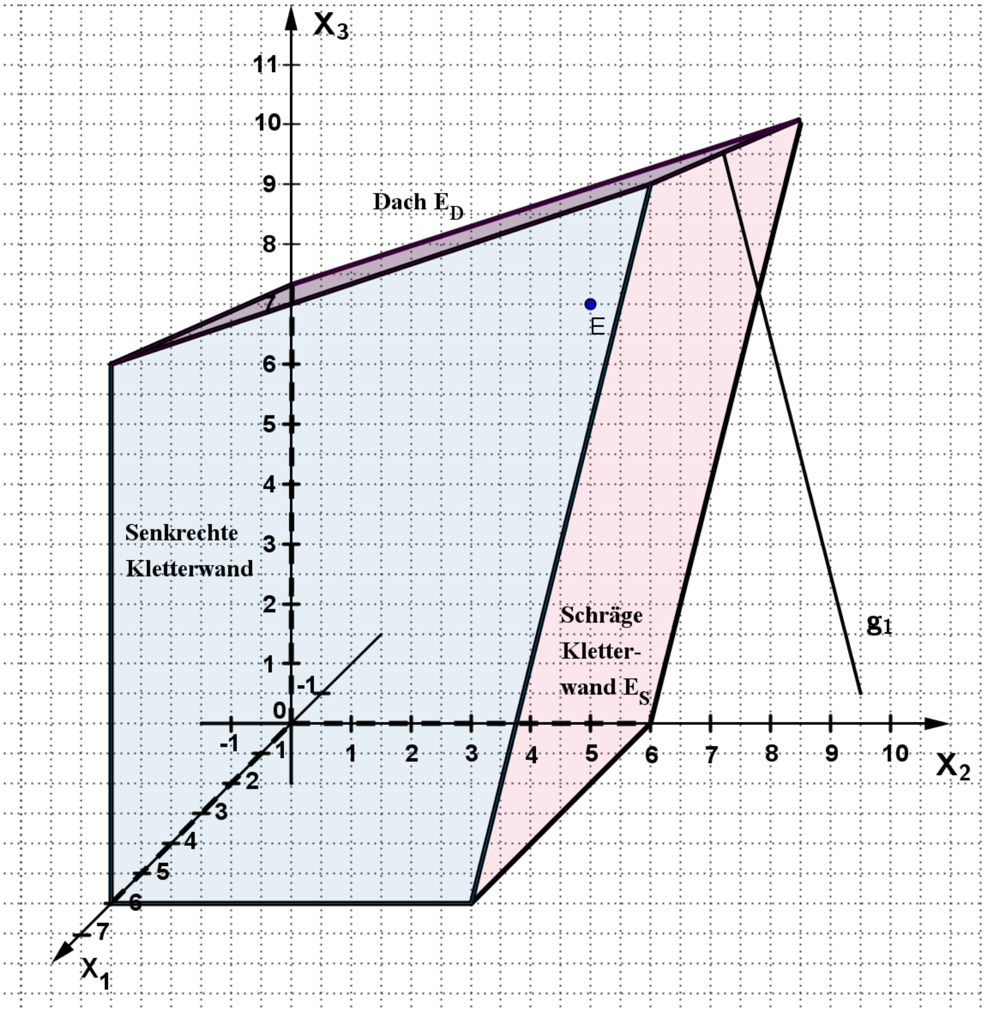


Abb.1

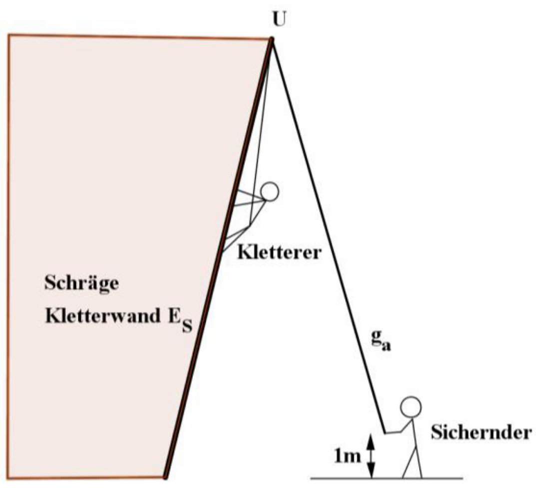


Abb. 2

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik **GTR**

Hörscreening für Neugeborene

In Deutschland geht man aufgrund von Studien davon aus, dass $0{,}12\%$ der Kinder mit beidseitigen Hörstörungen geboren werden (im Folgenden kurz „Hörstörung“). Solche Störungen können insbesondere die Sprachentwicklung negativ beeinflusssen. Um sie früh zu erkennen, gibt es eine Untersuchung für Neugeborene.

a) Es werden 500 Neugeborene auf Hörstörungen hin untersucht.

- Erläutern Sie, warum man diese 500 Untersuchungen als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann. Geben Sie dabei eine geeignete Zufallsgröße an.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit keines der 500 Neugeborenen eine Hörstörung hat.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens eines der 500 Neugeborenen eine Hörstörung hat.

(5 Punkte)

Die Messergebnisse bei der Untersuchung der Neugeborenen können jedoch auf zwei unterschiedliche Weisen fehlerhaft sein:

– Bei einem Kind liegt eine Hörstörung vor und trotzdem zeigt der Test an, dass das Kind ein ausreichendes Hörvermögen hat.

– Ein Kind hat ausreichendes Hörvermögen und trotzdem zeigt der Test an, dass das Kind eine Hörstörung hat.

Die Qualität des zur Zeit angewendeten Verfahrens lässt sich durch folgende Wahrscheinlichkeiten beschreiben:

– Hat ein Kind ein ausreichendes Hörvermögen, so stellt dies die Untersuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% auch fest.

– Hat ein Kind eine Hörstörung, so stellt dies die Untersuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% fest.

Geben Sie im Folgenden die Ergebnisse auf vier Nachkommastellen genau an.

b) Die Qualität des Verfahrens wird im Folgenden genauer untersucht.

- Stellen Sie in einem zweistufigen Baumdiagramm mit Pfadwahrscheinlichkeiten dar, wie Untersuchungsergebnisse, die eine Hörstörung oder ein ausreichendes Hörvermögen anzeigen, zu Stande kommen können.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Untersuchung eine Hörstörung anzeigt. (Zur Kontrolle: $P(\textit{Untersuchung zeigt Hörstörung an}) = 0{,}1011$)
- Im Merkblatt für die Eltern steht, dass nur ungefähr eines von 30 bis 40 Kindern mit dem Ergebnis „Hörstörung“ tatsächlich eine Hörstörung hat[1]. Beweisen oder widerlegen Sie diese Angabe.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind mit dem Ergebnis „Hörstörung“ tatsächlich eine Hörstörung hat, ist im Verhältnis zur Wahrscheinlichkeit, dass die Untersuchung eine Hörstörung anzeigt, gering. Erläutern Sie (eventuell auch mit Zahlenbeispielen), warum dies so ist.

(12 Punkte)

[1] Quelle: Merkblatt für Eltern, Gemeinsamer Bundesausschuss (G –BA)
Bei Kindern mit dem Untersuchungsergebnis „Hörstörung“ werden weitere, aufwändigere Untersuchungen durchgeführt.

Ein Messergebnis, das eine Hörstörung anzeigt, obwohl keine Hörstörung vorliegt, kann zum Beispiel durch Hintergrundgeräusche, Flüssigkeit im Ohr oder Unruhe des Kindes entstehen. Eine Firma behauptet, das Messverfahren bei sonst unveränderten Bedingungen so verbessert zu haben, dass bei weniger Kindern mit ausreichendem Hörvermögen ein falsches Messergebnis geliefert wird, die Wahrscheinlichkeit dafür also unter $p_0 = 10\%$ liegt.

Die Firma testet ihr Messverfahren an 100 Neugeborenen ohne Hörstörung. Es soll ein Test mit Binomialverteilung auf dem $1\% -$Signifikanzniveau für die Hypothese

H_1: *„Das neue Messverfahren liefert weniger falsche Messergebnisse bei Neugeborenen mit ausreichendem Hörvermögen als das alte Verfahren, $p_1 < 0{,}1$"*

entwickelt werden.

c)

- Geben Sie die zugehörige Nullhypothese und die Testgrößen an.
- Leiten Sie eine Entscheidungsregel her. Nutzen Sie dazu Ihren Rechner oder die Tabelle zur Binomialverteilung aus der Anlage.
- Geben Sie die Bedeutung des Fehlers 1. Art (α-Fehler) und 2. Art (β-Fehler) an.
- p_1 gibt die Wahrscheinlichkeit für ein falsch-positives Messergebnis beim neuen Messverfahren an. Bestimmen Sie den Fehler 2. Art für einen angenommenen Wert von $p_1 = 0{,}05$ und $n = 100$.
  (Falls Sie keinen Verwerfungsbereich bestimmt haben, nutzen Sie $V = \{0;...;3\}$.)

(9 Punkte)

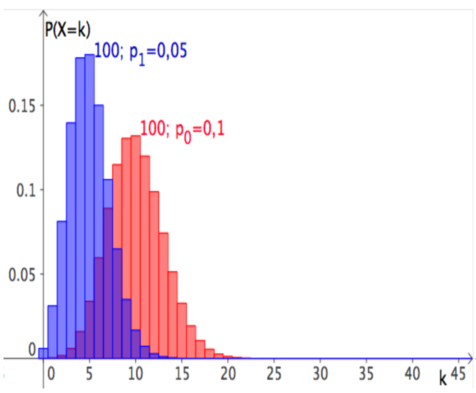
d) Verändert sich der Stichprobenumfang n, so verändert sich auch der Verwerfungsbereich.

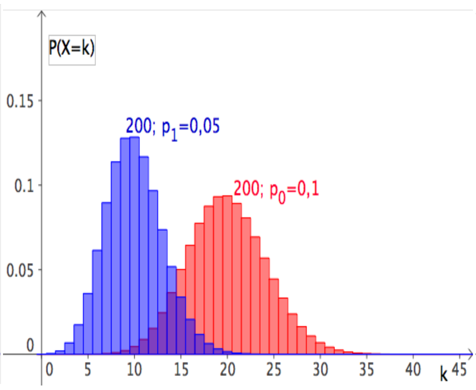
- Berechnen Sie für $n = 200$ und $n = 300$ die Verwerfungsbereiche für H_0 mit Ihrem Rechner oder unter Verwendung der Tatsache, dass in der $2{,}326\sigma -$Umgebung um den Erwartungswert ca. 98% der Stichprobenergebnisse liegen.

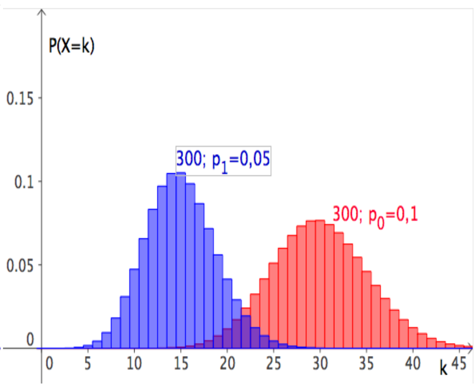
Die Histogramme unten zeigen die Binomialverteilungen für $p_0 = 0{,}1$ und $p_1 = 0{,}05$ für $n = 100$, $n = 200$ und $n = 300$.

- Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 2. Art in den Histogrammen durch die Markierung entsprechender Balken.
- Erläutern Sie, welche Auswirkungen die Vergrößerung des Stichprobenumfangs n auf die Wahrscheinlichkeit der beiden Fehlermöglichkeiten hat.

(7 Punkte)







Kumulierte Binomialverteilung, $n = 100$

k	$p = 0{,}1$	$p = 0{,}05$
0	0,000	0,006
1	0,000	0,037
2	0,002	0,118
3	0,008	0,258
4	0,024	0,436
5	0,058	0,616
6	0,117	0,766
7	0,206	0,872
8	0,321	0,937
9	0,451	0,972
10	0,583	0,989
11	0,703	0,996
12	0,802	0,999
13	0,876	1,000
14	0,927	1,000
15	0,960	1,000
16	0,979	1,000
17	0,990	1,000
18	0,995	1,000
19	0,998	1,000
20	0,999	1,000
21	1,000	1,000
22	1,000	1,000
23	1,000	1,000
24	1,000	1,000
25	1,000	1,000