Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2015

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 22. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Bildung und Wissenschaft über die **Hotline (0421 …)** von 7.00 bis 9.30. Die von der Senatorin für Bildung und Wissenschaft vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

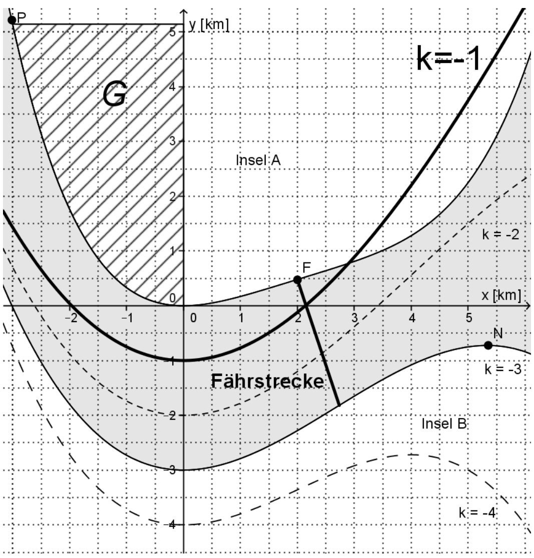
Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	Punkte
0 bis 19,5	00
20 bis 26,5	01
27 bis 32,5	02
33 bis 39,5	03
40 bis 44,5	04
45 bis 49	05
49,5 bis 54	06
54,5 bis 59	07
59,5 bis 64	08
64,5 bis 69	09
69,5 bis 74	10
74,5 bis 79	11
79,5 bis 84	12
84,5 bis 89	13
89,5 bis 94	14
94,5 bis 99	15

Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Es ist $a'(x)=0,04x^3-0,24x^2+0,48x$ und $a''(x)=0,12x^2-0,48x+0,48$. Aus $a''(x)=0$ folgt die einzige Nullstelle $x=2$. Es ist $a''(0)=0,48$ und $a''(4)=0,48$, also befindet sich an der Stelle $x=2$ kein Wendepunkt, da es sich nicht um einen Übergang von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt oder umgekehrt. Die Küstenlinie beschreibt eine ständige Linkskurve, nur an der Stelle $x=2$ befindet sich eine Stelle mit der Krümmung 0.	2	4	
b)	Veranschaulichung des Gebietes G siehe Schraffur im Aufgabenteil d). $G=3\cdot 5{,}13-\int_{-3}^{0} a(x)\,dx \;=3\cdot 5{,}13-\left[0{,}002x^5-0{,}02x^4+0{,}08x^3\right]_{-3}^{0}\approx 11{,}124$. Die Größe des Vogelschutzgebietes beträgt $11{,}124$ km².	3	1	
c)	Skizze siehe Strecke im Aufgabenteil d) Da $a'(2)=0,32$ ist, beträgt die Steigung m_t der Tangente im Punkt F: $m_t=0,32$. Da für zwei senkrecht aufeinander stehende Steigungen m_1 und m_2 gilt: $m_1\cdot m_2=-1$, ist die Steigung m_o der Orthogonalen $m_o=-3{,}125$. Einsetzen von m_o und den Koordinaten von F in die Geradengleichung $f(x)=m_o\cdot x+b$, ergibt die Gleichung $0,48=-3{,}125\cdot 2+b$. Daraus folgt $b=6,73$ und damit ist $f(x)=-3{,}125\cdot x+6,73$.	3	2	
d)	Graph von b_{-1} Die beiden Inseln werden in Zukunft zusammenwachsen.  $b_k'(x)=0,03kx^2+0,48x$ $b_k''(x)=0,06kx+0,48$ Mit $b_k'(x)=0$ erhält man $x_1=0$ oder $x_2=-\frac{16}{k}$. Für $k\le -\frac{8}{3}$ gilt: Aus $b_k'\left(-\frac{16}{k}\right)=0$ sowie $b_k''\left(-\frac{16}{k}\right)=-0,48<0$ und $b_k\left(-\frac{16}{k}\right)=\frac{512}{25\cdot k^2}+k$ folgt der nördlichste Punkt $N_k\left(-\frac{16}{k}\mid\frac{512}{25\cdot k^2}+k\right)$. Für $k>-\frac{8}{3}$ liegt der nördlichste Punkt im gegebenen Bereich $0\le x\le 6$ bei $x=6$. Es ergibt sich der Punkt $N_k\left(6\mid 3{,}16\cdot k+8,64\right)$. Für $k\le -\frac{8}{3}$ gilt: Aus $x=-\frac{16}{k}$ folgt $k=-\frac{16}{x}$.			

	Also ist $\frac{512}{25\cdot k^2}+k=\frac{512}{25\cdot\left(-\frac{16}{x}\right)^2}-\frac{16}{x}$ und damit ist $n(x)=\frac{2}{25}x^2-\frac{16}{x}$.	5	8	2
e)	$d(x)=a(x)-b_k(x)$ Eine mögliche Lösung für den Grenzverlauf findet man z.B. mit dem Ansatz $g_k(x)=b_k(x)+0,5\cdot d_k(x)=0,005x^4+0,005kx^3-0,04x^3+0,24x^2+0,5k$. Alternative Lösungen sind ebenfalls möglich.		2	1
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Liegt eine konstante Wachstumsrate vor, wird ein exponentieller Prozess beschrieben, also $f(t) = a \cdot e^{kt}$.

$f(0) = 7{,}14 \Rightarrow a = 7{,}14$

Wachstumsfaktor: $1 + p\% = 1{,}012 = e^{\ln 1{,}012} \approx e^{0{,}0119}$

$\Rightarrow f(t) = 7{,}14e^{0{,}0119t}$

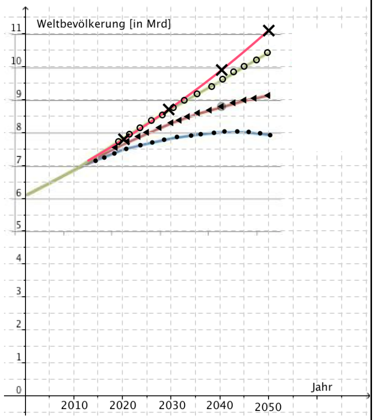
Die Aussage der DSW ist zutreffend, denn $f(37) \approx 11{,}09 \approx 11$, wobei $t = 37$ dem Anfang des Jahres 2050 entspricht.

$f(t) = 8 \Rightarrow t \approx 9{,}56$

$t = 9{,}56$, also wird nach dieser Modellierung etwa im Juli 2022 die 8 Milliarden-Grenze überschritten.
Funktionswerte für die Skizze (siehe rechts):

$f(7) \approx 7{,}76;\ \ f(17) \approx 8{,}74;$

$f(27) \approx 9{,}85;\ f(37) \approx 11{,}09$



</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Es ist $f'(t) = 0{,}085 \cdot e^{0{,}0119t}$. Mit dem Ansatz einer linearen Funktionsgleichung $h(t) = mt + b$ und den Werten für 2018:

$f(5) \approx 7{,}58$, $f'(5) = 0{,}0119 \cdot 7{,}14 \cdot e^{0{,}0119 \cdot 5} \approx 0{,}09$ folgt:

$f'(5) = m \Rightarrow h(t) = 0{,}09t + b$ und $f(5) = h(5) \approx 7{,}58 \quad \Rightarrow b \approx 7{,}13$.

Also wird die hohe Variante durch $h(t) = 0{,}09t + 7{,}13$ beschrieben.

Da $h(37) \approx 10{,}46$, entspricht der berechnete Wert etwa dem Wert für 2050 bei der hohen Variante in der Grafik.

Der absolute Zuwachs m pro Jahr bleibt gleich, während die absolute Anzahl n der Menschen auf der Welt steigt. Also wird der prozentuale Zuwachs $\frac{m}{n_J}$ mit zunehmender Jahreszahl J kleiner (n_J: Anzahl der Menschen Anfang des Jahres J).
</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
$m(0) = 7{,}14$. Also passt das Modell zum Ausgangswert für 2013.

$m'(0) \approx 0{,}10$, also ist die momentane Zuwachsrate ca. 0,1 Mrd. Menschen pro Jahr.

$\lim\limits_{t \to \infty} m(t) = 11$, also nähert sich die Weltbevölkerung auf lange Sicht dem Wert 11 Milliarden Menschen.

$$I_2 = \int_{27}^{28} m'(t)dt \approx 0{,}05$$

Die beiden Werte beschreiben den Zuwachs der Weltbevölkerung von Anfang 2020 bis Anfang 2021 bzw. von Anfang 2040 bis Anfang 2041. Der zweite Wert ist geringer, weil sich in diesem Modell die Weltbevölkerung einem Wert von 11 Milliarden Menschen annähert und damit auch der Anstieg der Weltbevölkerung immer geringer wird.

$\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = k \Rightarrow g(t) = k - d \cdot e^{-0{,}0256t}$

Mit $g(0) = 7{,}14 \Rightarrow d = k - 7{,}14$ und damit $g(t) = k - (k - 7{,}14) \cdot e^{-0{,}0256t}$.
</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr>
</table>

d)	Die Weltbevölkerung steigt zunächst bis auf einen Wert von etwas über 8 Mrd. an, dann nimmt sie wieder etwas ab. Der Zeitpunkt t_H des höchsten Bevölkerungswerts liegt etwa zwischen 2040 und 2045. $t_1 \approx 7,3;\ \ t_2 \approx 53,3$ Die entsprechenden Jahre sind 2020 und 2066. $\lim\limits_{t\to\infty} n(t) = 4$, da $(-at^2+bt) \to -\infty$ und damit $e^{-at^2+bt} \to 0$ für $t \to \infty$ und $a > 0$. Die Weltbevölkerung nähert sich nach diesem Modell langfristig einem Wert von vier Milliarden Menschen an. $n`(t) = 3,14(-0,00056t + 0,01697) \cdot e^{-0,00028t^2+0,01697t}$ $\approx (-0,001758t + 0,053286) \cdot e^{-0,00028t^2+0,01697t}$ (Kettenregel, Potenzregel, Faktorregel und Summenregel). Rechnereinsatz liefert $H(30,3 / 8,06)$.	1	4	1
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die Periodenlänge ist $P = 2\pi : (\frac{\pi}{12}) = 24$ Stunden, also eine Tageslänge.
- $f(23) \approx -2{,}55\ [mg/h]$.
  23 Stunden nach Beginn der Messung zeigt die Modellierungsfunktion einen negativen CO_2-Verbrauchswert von ungefähr $-2{,}55\,mg/h$. Auch der Wert der Messung ist nach 23 Stunden mit ungefähr $-1{,}5\,mg/h$ negativ. Allerdings unterscheiden sich die beiden Werte quantitativ: Der Wert der Modellierung ist hier um ungefähr $1\,mg/h$ kleiner als der der Messung.
- Bestimmung der Extrempunkte zum Beispiel über:
  Mit der Phasenverschiebung von $c = 6{,}1$ befindet sich der erste Hochpunkt der Sinusfunktion bei $t_{H_1} = \frac{P}{4} + c = 12{,}1$ (also nach 12 Stunden und 6 Minuten) und der erste Tiefpunkt bei $t_{T_1} = \frac{3P}{4} + c - P = 0{,}1$ (also nach 6 Minuten).
  Die Funktionswerte ergeben sich mit Amplitude $a = 11$ und Ruhelage $d = 8$ wie folgt:
  $$f(t_{H_1}) = d + a = 19 \text{ und } f(t_{T_1}) = d - a = -3.$$
  Im Definitionsbereich liegen die Extrempunkte:
  $H_1(12{,}1\,|\,19)$, $H_2(36{,}1\,|\,19)$, $T_1(0{,}1\,|\,-3)$, $T_2(24{,}1\,|\,-3)$
- Skizze:
- Argumente sind beispielsweise:
  - Der grobe Verlauf der Messergebnisse wird durch die Modellierung gut wiedergegeben.
  - Die kleinen Schwankungen innerhalb einer Periode werden durch die Modellierung nicht abgebildet, hier ist die Modellierung sehr grob.
  - Der Verlauf der Messungen ist im negativen Bereich eher abgeflacht, dies wird in der sinusförmigen Modellierung nicht erfasst.
  - Der gemessene Peak (die Spitze) des Verbrauchs befindet sich eher am Anfang des hohen Bogens und nicht symmetrisch in der Mitte, wie dies bei Sinuskurven der Fall ist.

</td><td>7</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Der CO_2-Verbrauch eines Tages ergibt sich aus der Ruhelage mit $8\,mg/h$ über 24 Stunden, also insgesamt $24 \cdot 8 = 192$ Milligramm.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Nullstellen mit $t \in [0;48]$:

$$f(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ 11\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)+8=0$$
$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)=-\frac{8}{11}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{12}(t-6{,}1)=\sin^{-1}\left(-\frac{8}{11}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ t=\frac{12}{\pi}\sin^{-1}\left(-\frac{8}{11}\right)+6{,}1$$

Die erste Nullstelle ist daher $t_{N1}\approx 2{,}99$,
die zweite bei $t_{N2}=6{,}1+P/2+(6{,}1-t_{N1})\approx 21{,}21$,
die dritte bei $t_{N3}=t_{N1}+24\approx 26{,}99$.

- In den Nullstellen verändert sich der CO_2-Gehalt der Luft nicht (die Prozesse Photosynthese und Zellatmung heben sich auf).
- Veranschaulichung siehe in der Skizze oben.
- $\frac{1}{t_{N2}-t_{N1}}\int_{t_{N1}}^{t_{N2}} 11\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)+8\,dt\approx\frac{1}{18{,}22}203{,}45\approx 11{,}17$,

$\frac{1}{t_{N3}-t_{N2}}\int_{t_{N2}}^{t_{N3}} 11\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)+8\,dt\approx\frac{1}{5{,}78}(-11.45)\approx -1{,}98$

In dem ersten Zeitraum wird wesentlich mehr CO_2 pro Stunde aus der Luft aufgenommen, als im zweiten Zeitraum an die Luft abgegeben wird.
</td>
<td>4</td>
<td>4</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>
Das kann zum Beispiel gezeigt werden durch:

$$g\left(\frac{1}{b}\cdot\sin^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)+c\right)=a\cdot\sin\left(\cancel{b}\left(\frac{1}{\cancel{b}}\sin^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)+\cancel{c}-\cancel{c}\right)\right)+d=\cancel{a}\cdot\left(-\frac{d}{\cancel{a}}\right)+d=0$$
</td>
<td>0</td>
<td>2</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>d)</td>
<td>

- a ist die Amplitude der Funktion. Der gepunktete Graph hat die kleinste Amplitude und gehört daher zum kleinsten Parameter $a=9$. Der gestrichelte Graph gehört zu $a=11$ und der durchgezogene mit der größten Amplitude zum Parameter $a=13$.
- Nach Aufgabenteil c) lauten die Nullstellen mit den entsprechenden Parametern $t=\frac{1}{\pi/12}\cdot\sin^{-1}\left(-\frac{8\cancel{a}/11}{\cancel{a}}\right)+6{,}1$. Da der Parameter a gekürzt werden kann, sind diese unabhängig von a. Damit haben alle Funktionen der Schar die gleichen Nullstellen.
- Die Nullstellen sind sinnvollerweise gleich, da der Photosyntheseprozess bei allen Pflanzen zum Tagesbeginn startet und zum Tagesende endet.
- Nachweis der notwendigen Bedingung, dass an $x=6{,}1$ eine Wendestelle der Funktionsschar f_a ist:

$f_a'(t)=a\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)$ und $f_a''(t)=-a\cdot\left(\frac{\pi}{12}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right)$

$f_a''(6{,}1)=-a\cdot\left(\frac{\pi}{12}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}(6{,}1-6{,}1)\right)=0$.
</td>
<td>2</td>
<td>5</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td>
<td>13</td>
<td>17</td>
<td>3</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Es gilt: $D_{RS} = B_{RZ} * C_{ZS} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 16 & 6 \\ 26 & 15 \end{pmatrix}$. Es gilt z.B. $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 14$. Es gilt: $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 16 & 6 \\ 26 & 15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490 \\ 500 \\ 970 \end{pmatrix}$. Für eine Produktion von 20 Steuergeräten S_1 und 30 Steuergeräten S_2 sind 490 ME von R_1, 500 ME von R_2 und 970 ME von R_3 erforderlich. Es gilt: $\begin{pmatrix} 4,50 & 2,50 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 16 & 6 \\ 26 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207 & 106,50 \end{pmatrix}$ Die Kosten für die Produktion von einem Steuergerät S_1 betragen 207 € und die von einem Steuergerät S_2 betragen $106,50$ €.	4	3	
b)	Mit dem Ansatz $B_{RZ} * \vec{z} = \vec{r}$ gilt: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 530 \\ 600 \\ 990 \end{pmatrix}$. Daraus folgt: $\begin{bmatrix} 2z_1 + 4z_2 + 198 = 530 \\ 4z_1 + 4z_2 + 132 = 600 \\ 2z_1 + 8z_2 + 462 = 990 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 = 68 \\ z_2 = 49 \\ z_2 = 49 \end{bmatrix}$. Es müssen also 68 ME von Z_1 und 49 ME von Z_2 produziert werden. Mit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 530 \\ 600 \\ 990 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{bmatrix} 2z_1 + 4z_2 + 3z_3 = 530 \\ 4z_1 + 4z_2 + 2z_3 = 600 \\ 2z_1 + 8z_2 + 7z_3 = 990 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 - 0,5z_3 = 35 \\ z_2 + z_3 = 115 \\ 0 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 = 35 + 0,5z_3 \\ z_2 = 115 - z_3 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$. Mit $z_3 \in \{0, 2, 4, ..., 114\}$ ergeben sich in den ersten beiden Gleichungen ganzzahlige und nicht negative Anzahlen der Zwischenprodukte z_1 und z_2. Somit ist L (s. b)) die Lösungsmenge der Matrix-Vektorgleichung. Der Produktionsleiter hat mehrere Möglichkeiten den Auftrag zu erfüllen: In Abhängigkeit von der Anzahl der Zwischenprodukte $z_3 \in \{0, 2, 4, ..., 114\}$ ergeben sich unterschiedliche Anzahlen der Zwischenprodukte z_1 und z_2.	3	4	1

c) Es ist $a = 1600 - 160 - 400 - 440 = 600$ und $b = 2400 - 320 - 600 - 120 = 1360$.

		Abgabe an				
		F	G	H	Markt	Produktion
Abgabe von	F	160	400	600	440	1600
	G	480	200	480	840	2000
	H	320	600	120	1360	2400

Es ist: $T = \begin{pmatrix} \frac{160}{1600} & \frac{400}{2000} & \frac{600}{2400} \\ \frac{480}{1600} & \frac{200}{2000} & \frac{480}{2400} \\ \frac{320}{1600} & \frac{600}{2000} & \frac{120}{2400} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,25 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,05 \end{pmatrix}$

Mit $(E - T) * \vec{x} = \vec{y}$ gilt $\begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,25 \\ -0,3 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,95 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2200 \\ 3300 \\ 3700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 1570 \\ 2085 \end{pmatrix}$.

Die Produktionsstelle F gibt 395 ME, G gibt 1570 ME und H gibt 2085 ME an den Markt ab.

Bewertung: 4 | 4 |

d) Ansatz: $\left(E - A\right)^{-1} * \left(E - A\right) = E$. Es ist $(E - A) = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & -0,5 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ -0,5 & -0,125 & 0,75 \end{pmatrix}$.

Mit $\begin{pmatrix} 46 & d & 36 \\ 20 & 8 & 16 \\ 34 & 12 & 28 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & -0,5 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ -0,5 & -0,125 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

folgt z.B.: $46 \cdot 0,5 + d \cdot \left(-0,25\right) + 36 \cdot \left(-0,5\right) = 1 \Leftrightarrow d = 16$.

Bewertung: 1 | 3 |

e) Mit $t = 2$ gilt: $\vec{x} = \left(E - A\right)^{-1} * \vec{y} = \begin{pmatrix} 46 & 16 & 36 \\ 20 & 8 & 16 \\ 34 & 12 & 28 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 318 \\ 148 \\ 242 \end{pmatrix}$.

Die Gesamtproduktion beträgt somit $318 + 148 + 242 = 708$ ME.

Es gilt: $\vec{x} = \left(E - A\right)^{-1} * \vec{y} = \begin{pmatrix} 46 & 16 & 36 \\ 20 & 8 & 16 \\ 34 & 12 & 28 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 10 - t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 - 16t + 36t^2 \\ 100 - 8t + 16t^2 \\ 154 - 12t + 28t^2 \end{pmatrix}$.

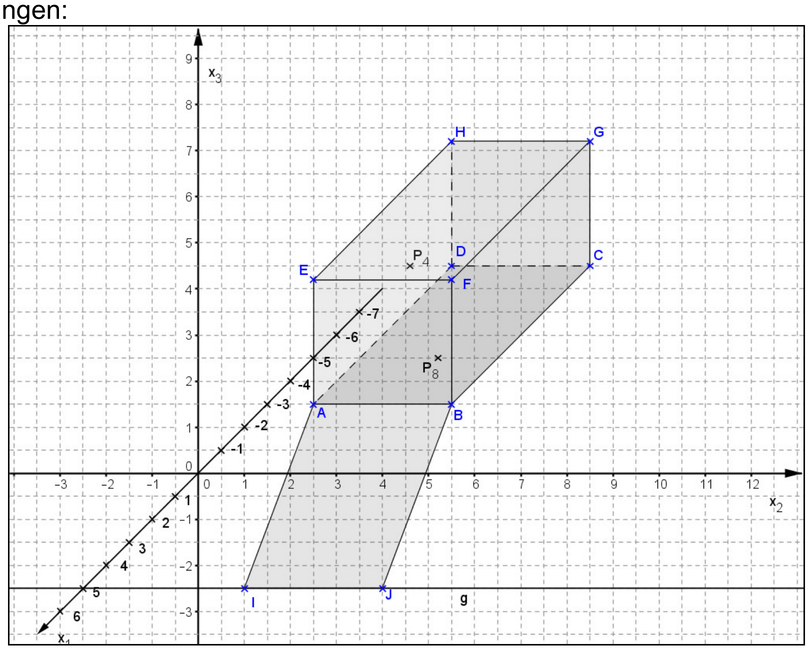
Die Gesamtproduktion ergibt sich als Summe der einzelnen Produktionsmengen in Abhängigkeit von t. Daraus ergibt sich dann eine Funktion f mit $f(t) = 460 - 36t + 80t^2$, wobei $f(t)$ die Gesamtproduktion in Abhängigkeit von t beschreibt. Da $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,225$ gilt und der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist $t = 0,225$ die Minimalstelle von f. Also wird die Gesamtproduktion für $t = 0,225$ am geringsten.

Bewertung: 1 | 3 | 2

Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zeichnungen:



Das Viereck ist ein Parallelogramm weil die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel zueinander sind (Nachweis z.B. durch $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ und $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BJ}$ oder Betrachtung der Beträge der jeweiligen Vektoren). Abgrenzung zum Rechteck: $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AI} = 3 \neq 0$, es liegt also kein Rechteck vor.</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Eine mögliche Lösung für den Normalenvektor ist z.B. $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Die daraus folgende Ebenengleichung wäre dann $3x_1 + 10x_3 = 15$
Ansatz für die Betrachtung der Steigung: zunächst muss der Winkel zwischen der Einfahrt und der x_1x_2-Ebene bestimmt werden. Der wird über $\vec{n}_1$ und einem selbst gewählten Normalenvektor zur x_1x_2-Ebene, z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt. Es gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 10^2} \cdot \sqrt{1}} \approx 0{,}958$$, daraus folgt $\alpha \approx 16{,}7°$

Die Steigung der Einfahrt ergibt sich aus $m = \tan\alpha \approx 0{,}299 \approx 30\%$. Die Garage entspricht nicht der Bremer Verordnung, weil die Steigung größer als 20% ist.
Alternative Lösungen (z.B. die Bestimmung des Winkels zwischen $\overrightarrow{AI}$ und der Projektion von $\overrightarrow{AI}$ in die x_1x_2-Ebene) sind möglich und gleichermaßen positiv zu bewerten.</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>

c)	Eine mögliche Geradengleichung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3,5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ Zeichnung: siehe Aufgabenteil a.) Eine mögliche Vorgehensweise zur Abstandsbestimmung enthält die Lotfußpunktbestimmung: Das Skalarprodukt zwischen einem Verbindungsvektor (der den Punkt F mit der Gerade g verbindet) und dem Richtungsvektor von g muss null ergeben. $\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}5\\3,5+t\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\5,5\\4,2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow -2+t=0\Leftrightarrow t=2$ Setzt man $t=2$ in die Geradengleichung ein, so erhält man $L(5\|5,5\|0)$ als Lotfußpunkt. Abstand: $d=\left\|\overrightarrow{FL}\right\|=\sqrt{(5-0)^2+(5,5-5,5)^2+(0-4,2)^2}=\sqrt{42,64}\approx 6,53$ Der Bewegungsmelder ist mit einem Reaktionsabstand von $6\,m$ sinnvoll eingestellt. Beurteilend kann z.B. beschrieben werden, dass der berechnete Abstand nur für den Straßenrand selbst gilt und nicht für vorbei gehende Fußgänger mit bestimmter Körperhöhe. Somit muss die Einstellung des Bewegungsmelders von $6\,m$ doch angepasst werden.	4	5	
d)	Der Parameter hat nur Einfluss auf die Richtung, in der der Laserpointer gehalten werden muss. Die Position des Pointers bleibt immer gleich. Konkreter neigt der Junge bei verschiedenen Werten von a den Pointer in unterschiedliche vertikale und horizontale Richtung. Der Nachweis von E_2 ist z.B. durch eigene Konstruktion einer Ebenengleichung oder durch Argumentation (Garagentor liegt in der x_2x_3-Ebene) möglich. Für die Zeichnung des Auftreffpunkts muss der Durchstoßpunkt von h_8 durch E_2 bestimmt werden: Einsetzen von h_8 in E_2 liefert $12+t\cdot(-12)=0\Leftrightarrow t=1$. Daraus ergibt sich als Durchstoßpunkt $P_8(0\|5,2\|2,5)$. Zeichnung siehe a.). Nachweis des Verfehlens vom Garagentor: Bei $a=4$ liefert der Schnitt von h_4 mit E_2 wiederum $t=1$ und daraus folgt $P_4(0\|4,6\|4,5)$. Weil die x_3-Koordinate um $0,3$ größer ist als die x_3-Koordinate der oberen Kante vom Garagentor, verfehlt der Junge das Tor um $0,3\,m$. Zwei Bedingungen für kleinsten bzw. größten Wert von a: 1. in x_2 – Richtung: $4+0,15\cdot a_{\min}=2,5\Leftrightarrow a_{\min}=-10$ und $4+0,15\cdot a_{\max}=5,5\Leftrightarrow a_{\max}=10$ 2. in x_3 – Richtung: $6,5+(-0,5)\cdot a_{\min}=4,2\Leftrightarrow a_{\min}=4,6$ und $6,5+(-0,5)\cdot a_{\max}=1,5\Leftrightarrow a_{\max}=10$ Gesamtlösung: $\Rightarrow 4,6\le a\le 10$ Alle Geraden der Schar h_a schneiden sich im Punkt $Q(12\|4\|6,5)$. Da der Parameter a den Richtungsvektor von h_a nur in der x_2 – Richtung und x_3 – Richtung beeinflusst, bildet sich eine Ebene. Alternative korrekte Begründungen sind gleichermaßen positiv zu bewerten.	4	6	2
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

X : *Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen* kann als binomialverteilt mit $n=25$ und $p=0{,}14$ angenommen werden.

$P(X=0)\approx 0{,}023$

Die Wahrscheinlichkeit keinen suchtgefährdeten Jugendlichen dabei zu haben beträgt ca. $2{,}3\,\%$.

$P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)\approx 1-0{,}733=0{,}267$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünf suchtgefährdete Jugendliche in der Gruppe sind, beträgt ca. $26{,}7\,\%$.

$P(1\leq X\leq 4)=P(X\leq 4)-P(X=0)\approx 0{,}733-0{,}023=0{,}710$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens einen und höchstens vier suchtgefährdete Jugendliche dabei zu haben beträgt ca. $71\,\%$.

$0{,}11\cdot 0{,}14\approx 0{,}015\mathrel{\hat{=}}1{,}5\,\%$

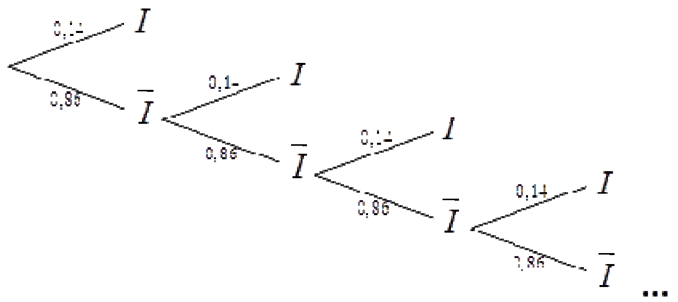
Z : *Anzahl der jugendlichen, suchtgefährdeten Deutschen* kann als binomialverteilt mit $n=25$ und $p=0{,}015$ bzw. $q=1-p=0{,}985$ angenommen werden.

$P(Z\leq 1)=1-P(Z=0)=1-q^{25}\approx 1-0{,}685=0{,}315$

Die Wahrscheinlichkeit unter 25 zufällig ausgewählten Deutschen mindestens eine jugendliche, suchtgefährdete Person zu finden beträgt ca. $31{,}5\,\%$.

</td><td>7</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

I : angesprochener Jugendlicher ist suchtgefährdet
$\overline{I}$: angesprochener Jugendlicher ist nicht suchtgefährdet



$P(Y=3)=0{,}86^{2}\cdot 0{,}14\approx 0{,}104$

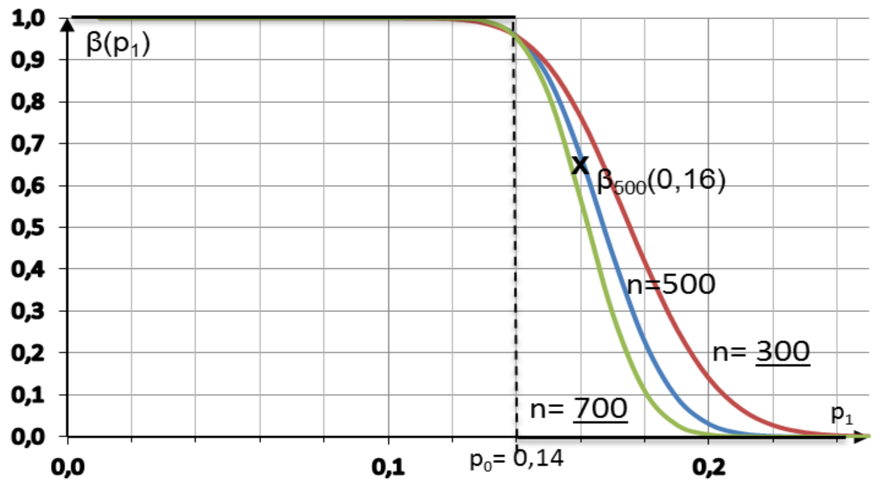
Die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte angesprochene Person ein suchtgefährdeter Jugendlicher ist, beträgt ca. $10\,\%$.

$P(Y>3)=0{,}86^{3}\approx 0{,}636$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei befragten Jugendlichen kein suchtgefährdeter dabei ist, beträgt ca. $64\,\%$.

$P(Y\leq k)>0{,}99\Leftrightarrow 1-P(Y>k)>0{,}99\Leftrightarrow 1-0{,}86^{k}>0{,}99$
$\Leftrightarrow 0{,}86^{k}<0{,}01\Leftrightarrow k>\log_{0{,}86}0{,}01\Leftrightarrow k>30{,}53\Leftrightarrow k\geq 31$
Es müssen mindestens 31 Personen befragt werden.

</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr>
</table>

c)	H_0: Der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen ist gleich geblieben, also $p_0 = 0{,}14$. H_1: Der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen hat sich vergrößert, also $p_1 > 0{,}14$. X : *Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen* kann als binomialverteilt mit $n = 500$ und $p_0 = 0{,}14$ angenommen werden. $\mu = 500 \cdot 0{,}14 = 70$ und $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86} \approx 7{,}759 > 3$ Rechnung mit Rechnereinsatz und den im Unterricht vereinbarten Notationen: Da es ein rechtsseitiger Test ist, ergibt sich $\mu + 1{,}64 \cdot \sigma = 70 + 1{,}64 \cdot 7{,}759 \approx 82{,}725$. $P(X \geq 83) = 1 - P(X \leq 82) \approx 0{,}056 > 0{,}05$ $P(X \geq 84) = 1 - P(X \leq 83) \approx 0{,}043 < 0{,}05$ Damit ist der Verwerfungsbereich $V = \{84;...;500\}$. D.h., wenn mindestens 84 suchtgefährdete Jugendliche dabei sind, wird angenommen, dass sich der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen vergrößert hat.	2	5	
d)	Ein Fehler 2. Art bedeutet, dass der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen tatsächlich größer als 14 % geworden ist, es bei der Testdurchführung jedoch nicht erkannt wird, da das Testergebnis nicht im Verwerfungsbereich der Nullhypothese liegt. X : *Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen* kann als binomialverteilt mit $n = 500$ und $p_1 = 0{,}16$ angenommen werden. $\beta = P(X < 84) = P(X \leq 83) \approx 0{,}669$ Die Wahrscheinlichkeit, dass angenommen wird, dass der Anteil suchtgefährdeter Jugendlicher gleich geblieben ist, obwohl dieser gestiegen ist, beträgt ca. 67 %.  Der Graph zu $n = 700$ verläuft steiler und damit im Bereich $p_1 > p_0 = 0{,}14$ unterhalb der Kurven zu $n = 300$ und $n = 500$. D.h. β ist bei größerem Stichprobenumfang n (und gleichem Wert für α) kleiner. D.h. mit zunehmendem n kann immer besser erkannt werden, ob eine Hypothese wahr oder falsch ist. Der Test wird trennschärfer. Skizze der idealen OC s. obiges Koordinatensystem (Sprungstelle bei $p = p_0 = 0{,}14$).	1	4	2
Verteilung der insgesamt **33** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Schriftliche Abiturprüfung 2015

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 22. April, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis **GTR**

Küstenlinien

In dieser Aufgabe sollen die Küstenlinien von zwei Inseln A und B untersucht werden. Die Küstenlinie der Insel A kann mit der Funktion a mit

$$a(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}08x^3 + 0{,}24x^2 \text{, für } -3 \le x \le 6$$

modelliert werden, wobei x und $a(x)$ in Kilometern angegeben sind. Eine Abbildung mit dem Graphen von a befindet sich im Anhang.

a) Im Folgenden soll der Verlauf der Küstenlinie der Insel A untersucht werden.

- Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion a.
- Weisen Sie rechnerisch nach, ob der Graph von a einen Wendepunkt besitzt.
- Erläutern Sie die Bedeutung dieses Ergebnisses für das Krümmungsverhalten (Kurvenverhalten) der Küstenlinie von a im Bereich $-3 \le x \le 6$.

(6 Punkte)

b) An der westlichen Küste der Insel A soll ein Vogelschutzgebiet eingerichtet werden. Dieses wird im Norden von der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $P(-3 \mid 5{,}13)$ begrenzt, im Osten durch die y-Achse und im Südwesten durch den Graph der Funktion a.

- Veranschaulichen Sie die Fläche des geplanten Vogelschutzgebietes im Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Gebietes unter Angabe einer Stammfunktion.

(4 Punkte)

c) An der Ostküste der Insel A soll ein Fähranleger gebaut werden. Es wird vorgeschlagen, den Fähranleger im Punkt $F(2 \mid 0{,}48)$ einzurichten. Von dort aus soll eine Fähre senkrecht von der Küstenlinie der Insel A ablegen und geradlinig in Richtung der Insel B fahren.

- Skizzieren Sie die geplante Strecke der Fähre in das Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $f(x)$, die die geplante Fahrtroute darstellt.

(5 Punkte)

d) Bei der Insel A handelt es sich um eine durch Deiche befestigte Insel, während die Insel B eine reine Sandinsel ist, deren Küstenlinie sich im Laufe der Zeit verändert. Die Küstenlinie von B kann näherungsweise mit der Funktionsschar b_k mit

$$b_k(x) = 0{,}01 \cdot k \cdot x^3 + 0{,}24x^2 + k \text{, für } -3 \le x \le 6 \text{ und } -4 \le k < 0$$

modelliert werden, wobei x und $b(x)$ in Kilometern angegeben sind. Für $k = -4$ stellt die Modellierung die Küstenlinie vor 100 Jahren und für $k = -3$ den heutigen Küstenverlauf dar (siehe Anhang). Im Modell wird angenommen, dass die weitere Entwicklung der Küstenlinie so von k abhängt, dass für $k = -2$ der Verlauf in 100 Jahren und für $k = -1$ der Verlauf in 200 Jahren prognostiziert werden kann.

- Zeichnen Sie den in 200 Jahren prognostizierten Küstenverlauf in das Koordinatensystem im Anhang ein.
- Beschreiben Sie die Konsequenz, die sich aus den prognostizierten Küstenlinien ergibt.

- Bestimmen Sie für alle Graphen von b_k die Koordinaten des nördlichsten Punktes N_k im Bereich $0 \le x \le 6$.

- Zeigen Sie, dass für $k \le -\frac{8}{3}$ alle Punkte N_k auf dem Graphen der Funktion n mit $n(x) = \frac{2}{25}x^2 - \frac{16}{x}$ liegen.

  (Hinweis: Falls Sie N_k nicht bestimmen konnten, verwenden Sie $N_k\left(-\frac{16}{k} \mid \frac{512}{25 \cdot k^2} + k\right)$.)

(15 Punkte)

e) Die Funktion d_k mit

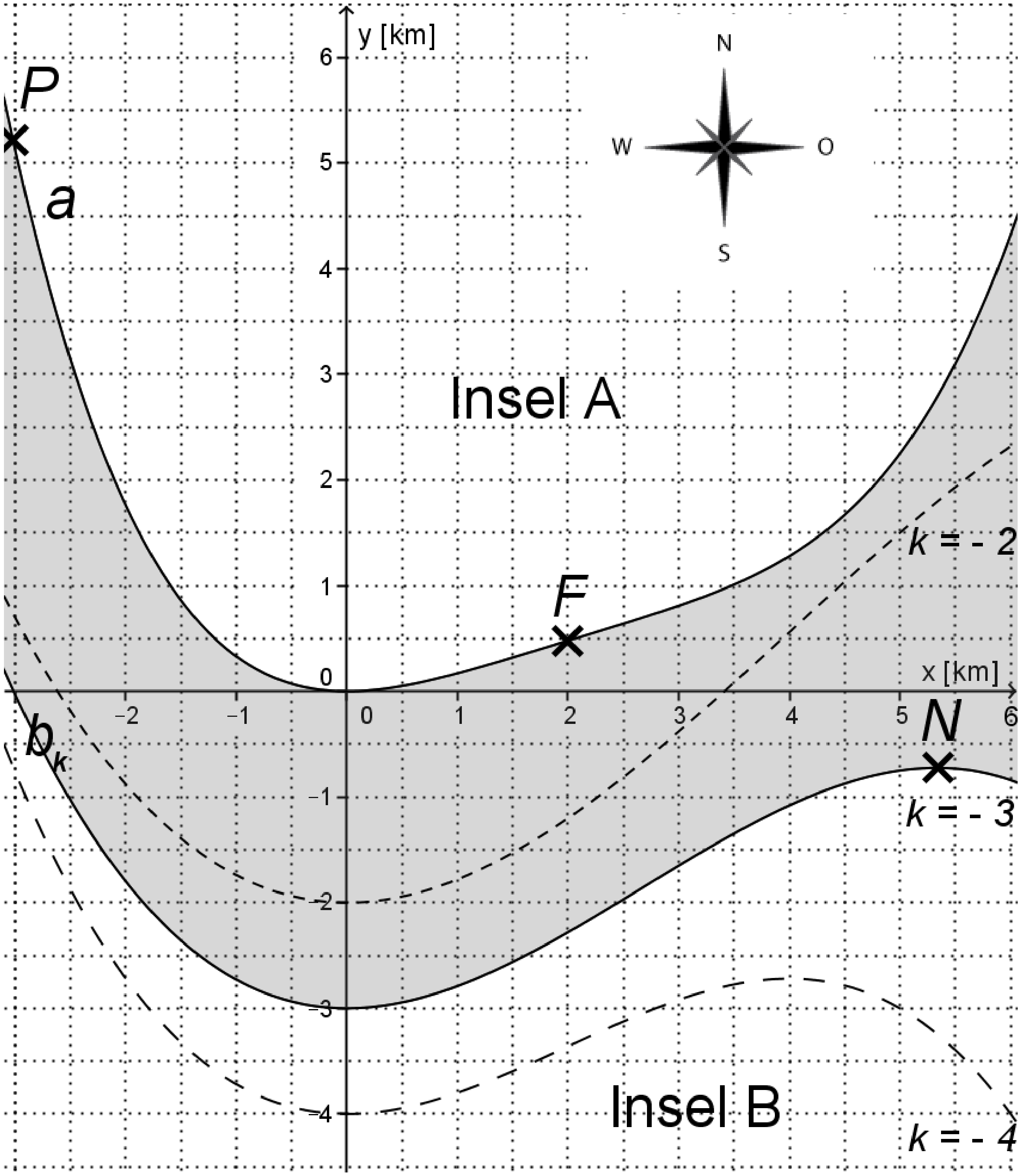
$$d_k(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}08x^3 - 0{,}01kx^3 - k \text{ für } -3 \le x \le 6 \text{ und } -4 \le k < 0$$

gibt den Nord-Süd-Abstand zwischen den Küstenlinien an, wobei x und $d_k(x)$ in Kilometern angeben sind.

- Leiten Sie den Term der Funktion d_k mit Hilfe der Funktionen a und b_k her.
- Beide Inseln gehören zu verschiedenen Ländern. Die Grenze zwischen den beiden Inseln soll im Meer verlaufen, und zwar so, dass beide Länder im Bereich $-3 \le x \le 6$ gleich große Flächenanteile am Meeresgebiet erhalten. Ermitteln Sie eine Funktion g_k, die einen möglichen Grenzverlauf modelliert.

(3 Punkte)

Anhang


y [km]
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
x [km]
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
P
a
F
N
b_k
Insel A
Insel B
k = - 2
k = - 3
k = - 4
N
W
O
S

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis GTR

Weltbevölkerungsprognosen

Die bekanntesten Schätzungen zur Entwicklung der Weltbevölkerung stammen von den Forschern der Vereinten Nationen (UN). Die Forscher veröffentlichen vier verschiedene Varianten, die in den einzelnen Aufgabenteilen betrachtet werden. Eine vergrößerte Grafik mit den drei Varianten aus den Aufgabenteilen b), c) und d) finden Sie im Anhang[1].

Auf der Welt lebten Anfang des Jahres 2013 ca. $7{,}14$ Milliarden Menschen. $t = 0$ entspricht in allen folgenden Aufgabenteilen dem Anfang des Jahres 2013.

a) In den letzten Jahren lag die Wachstumsrate der Weltbevölkerung konstant bei $1{,}2\%$ pro Jahr. Es wird angenommen: Die Weltbevölkerung entwickelt sich so wie in den letzten Jahren weiter.

- Zeigen Sie, dass eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 7{,}14\, e^{0{,}0119t}; \qquad t \geq 0$$

  diese Fortschreibung der bisherigen Entwicklung der Weltbevölkerung modelliert. $f(t)$ gibt die Bevölkerung in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach 2013 an.
- Die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung schrieb im Jahr 2013: „*Bliebe die (Wachstums-)rate konstant auf dem heutigen Niveau, gäbe es 2050 sogar schon 11 Milliarden Menschen auf der Welt*“. Beurteilen Sie diese Aussage.
- Bestimmen Sie, in welchem Jahr und in welchem Monat bei dieser Entwicklung die 8-Milliarden-Grenze überschritten wird.
- Skizzieren Sie mit Hilfe der Werte zu 2020, 2030, 2040 und 2050 den Graphen von f im Koordinatensystem im Anhang.

(9 Punkte)

b) Bei der Variante der UN-Prognose zur Weltbevölkerung in diesem Aufgabenteil gehen die Forscher von einem hohen Bevölkerungswachstum aus. Wird der Graph zur hohen Variante betrachtet, so scheint die angenommene Entwicklung ab 2018 linear zu verlaufen.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $h(t)$ einer Geraden, welche die exponentielle Entwicklung aus Aufgabenteil a) ab Anfang 2018 knickfrei linear fortsetzt ($t = 0$: Anfang des Jahres 2013, $h(t)$ gilt für $t \geq 5$). Rechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau.
- Vergleichen Sie den Wert von $h(t)$ für 2050 mit dem Prognosewert der UN für die hohe Variante in der Grafik der Anlage.
- Erläutern Sie, warum die jährliche prozentuale Zunahme in dem linearen Modell h abnimmt.

(8 Punkte)

c) Die Forscher der UN nennen die Variante, die in diesem Aufgabenteil betrachtet wird, „mittlere Variante“. Wir beschreiben diese mittlere Variante durch die Funktion m mit

$$m(t) = 11 - 3{,}86e^{-0{,}0256t}; \quad t \geq 0.$$

$m(t)$ gibt die Bevölkerung in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach 2013 an.

- Überprüfen Sie, ob das Modell zur Anzahl der Menschen im Jahr 2013 ($t = 0$) passt.
- Bestimmen Sie die momentane Zuwachsrate der Weltbevölkerung Anfang 2013 ($t = 0$).

[1] Die den Aufgaben zugrundeliegenden Daten stammen aus World Population Prospects, The 2012 Revision, United Nations New York 2013 und den im Jahr 2014 veröffentlichten Werten (hier nach „Info Weltbevölkerung“ der Deutschen Stiftung Weltbevölkerung (DSW).

- Untersuchen Sie, was die Modellierung mit der Funktion m auf lange Sicht für die Entwicklung der Weltbevölkerung aussagt.
- Es gilt $I_1 = \int_7^8 m'(t)dt \approx 0{,}08$. Berechnen Sie $I_2 = \int_{27}^{28} m'(t)dt$.
- Interpretieren Sie den Unterschied der beiden Werte im Sachzusammenhang.
- Für weitere Prognosen mit beschränktem Wachstum wird ein Grenzwert von k Milliarden Menschen angenommen, Ausgangswert sind $7{,}14$ Milliarden Menschen Anfang des Jahres 2013 ($t = 0$). Ermitteln Sie mit diesen Daten eine neue Funktion g mit

  $$g(t) = c - d \cdot e^{-0{,}0256t}; \quad t \geq 0$$

  wobei die Funktion g die Bevölkerungszahl $g(t)$ in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschreibt.

(10 Punkte)

d) Betrachten Sie die niedrige Variante der UN-Prognose im Anhang.

- Beschreiben Sie in ein bis zwei Sätzen, was der Graph über die Entwicklung der Weltbevölkerung nach dieser Variante aussagt.

Wir modellieren diese niedrige Variante durch die Funktion n mit

$$n(t) = 3{,}14e^{-0{,}00028t^2+0{,}01697t} + 4; \quad t \geq 0,$$

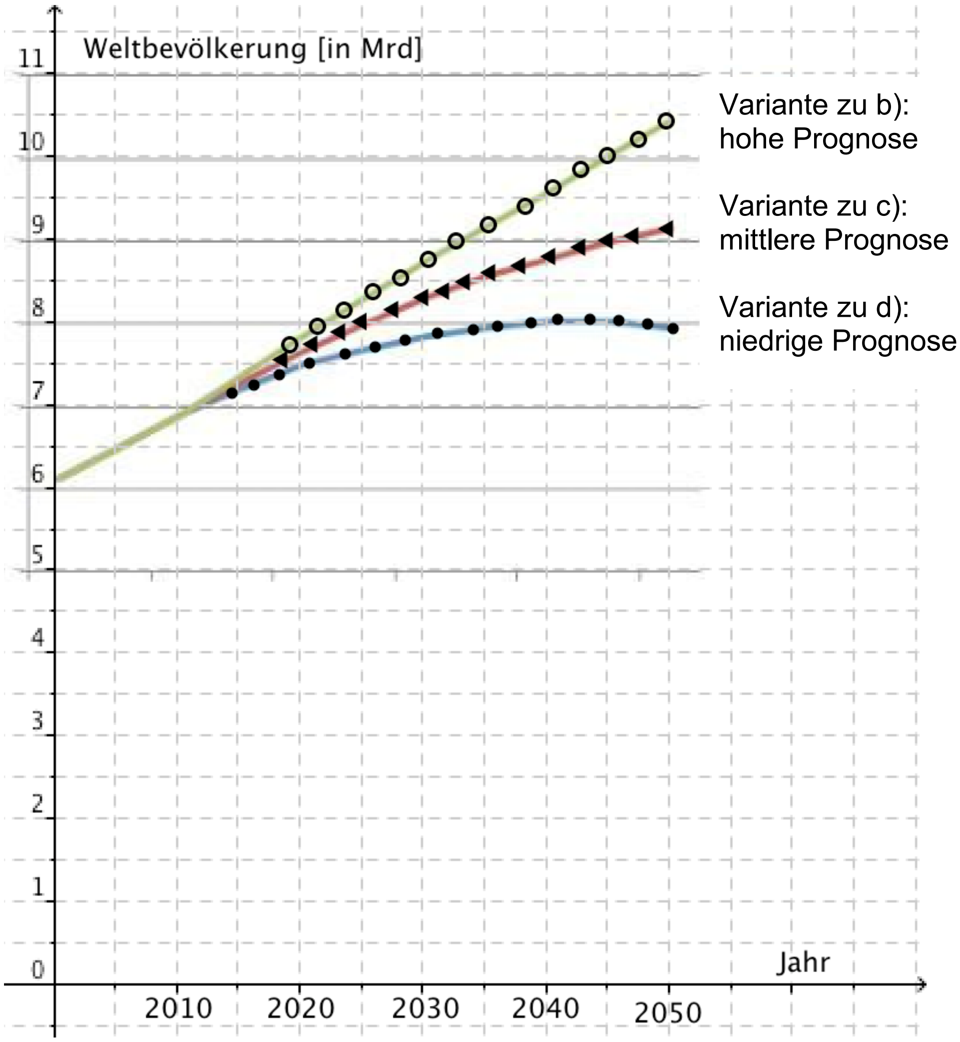
$n(t)$ gibt die Bevölkerungszahl in Milliarden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach 2013 an.

- Bestimmen Sie die Zeitpunkte t und die zugehörigen Jahreszahlen, zu denen bei dieser Prognose $7{,}5$ Milliarden Menschen auf der Erde leben.
- Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} n(t)$.
- Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion zu n unter Angabe der Rechenregeln.

  (Zur Kontrolle: $n'(t) \approx (-0{,}001758t + 0{,}053286) \cdot e^{-0{,}00028t^2+0{,}01697t}$; $t \geq 0$)
- Die Funktion n hat ein Maximum. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H , an dem dieses Maximum liegt.

(6 Punkte)

Anhang[2]



2 Quelle der Grafik: http://www.berlin-institut.org/newsletter/1291624141_UN-Wachstumsprognosen.jpg (Zugriff 19.6.2014). Die Grafik wurde in ein Koordinatensystem eingebettet.

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

GTR

CO_2-Verbrauch einer Tomatenpflanze

Messkurve

Pflanzen erzeugen bei Lichteinwirkung Sauerstoff aus CO_2.
Dieser Prozess heißt Photosynthese.

Bei Dunkelheit dagegen wird Sauerstoff in CO_2 umgewandelt und an die Luft abgegeben. Dieser Prozess heißt Zellatmung.

Die Messkurve in Abbildung 1 stellt das Ergebnis einer Luftmessung dar.

http://www.bio.vobs.at/botanik/b-photosynthese-2.php

Abbildung 1
CO_2-Verbrauch einer Tomatenpflanze

Diese Abbildung ist vergrößert als Abbildung 2 im Anhang zu finden. Es wurde gemessen, wie viel CO_2 der Luft pro Zeit durch eine Tomatenpflanze verbraucht wird (in Milligramm pro Stunde).

Tagsüber verbraucht die Tomatenpflanze CO_2, d.h. sie nimmt CO_2 aus der Luft auf.[3]

Umgekehrt gibt die Tomatenpflanze nachts CO_2 ab, d.h. der CO_2-Verbrauch der Tomatenpflanze ist negativ.

Die trigonometrische Funktion f mit

$$f(t) = 11 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 6{,}1)\right) + 8\,,\ t \in \mathbb{R}\,, t \in [0;48]$$

modelliert den oben genannten CO_2-Verbrauch. t ist die Anzahl der Stunden nach Messbeginn und $t = 0$ entspricht dem Beginn der Messung um Mitternacht. $f(t)$ gibt an, wie viel CO_2 der Luft in Milligramm pro Stunde zum Zeitpunkt t von der Tomatenpflanze näherungsweise verbraucht wird.

a) Die Modellierung des CO_2-Verbrauchs mit der Funktion f wird im Folgenden untersucht:

- Geben Sie die Periodenlänge der Funktion f an.
- Vergleichen Sie den CO_2-Verbrauch des Modells (Funktion f) mit dem der Messung (Graph in Abb. 2 im Anhang) am Zeitpunkt $t = 23$.
- Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f im angegebenen Definitionsbereich.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 2 im Anhang.
- Beurteilen Sie die Modellierung durch die Funktion f (zwei Aspekte).

(13 Punkte)

b) Im Folgenden werden verschiedene Arten von CO_2-Verbrauch betrachtet:

- Bestimmen Sie den Gesamt-CO_2-Verbrauch der Tomatenpflanze an einem Tag (24 Stunden).
- Berechnen Sie die ersten drei Nullstellen der Funktion f durch Umstellen einer entsprechenden Gleichung.
  [Angabe für weitere Berechnungen:
  Die ersten drei Nullstellen sind näherungsweise: $t_{N1} \approx 2{,}99$; $t_{N2} \approx 21{,}21$ und $t_{N3} \approx 26{,}99$.]
- Interpretieren Sie die Nullstellen im Sachzusammenhang.

---

[3] Streng genommen handelt es sich um einen Austauschprozess und damit um eine Bilanz: die Tomatenpflanze entnimmt tagsüber der Luft mehr CO_2 als sie gleichzeitig abgibt.

Wir betrachten nun die zwei Intervalle $[t_{N1};t_{N2}]$ und $[t_{N2};t_{N3}]$.

- Veranschaulichen Sie die beiden Flächen, die vom Graphen von f und der x-Achse über diesen Intervallen eingeschlossen werden.

  [Falls Sie den Graphen von f nicht skizziert haben, verwenden Sie die Messkurve im Anhang mit sinnvoll angepassten Nullstellen.]
- Berechnen Sie die mittleren CO_2-Verbrauchwerte auf den beiden Intervallen.
- Vergleichen Sie die berechneten mittleren CO_2-Verbrauchswerte im Sachzusammenhang.

(9 Punkte)

c) Gegeben sei die Funktion g mit $g(t) = a \cdot \sin\big(b(t-c)\big) + d$ und $a,b,c,d,t \in \mathbb{R}$, $a,b \neq 0$.

Für jede Nullstelle t gilt:

$$t = \frac{1}{b} \cdot \sin^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right) + c\,.$$

Zeigen Sie, dass jedes t dieser Form eine Nullstelle der Funktion g ist.

(3 Punkte)

d) Die Funktionsschar f_a mit

$$f_a(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6{,}1)\right) + \frac{8a}{11},\ a,t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 24,\ 9 \le a \le 13$$

modelliert den CO_2-Verbrauch verschiedener Tomatenpflanzen unterschiedlicher Größe. t ist wieder die Anzahl der Stunden nach Messbeginn und $t = 0$ entspricht dem Beginn der Messung um Mitternacht. $f_a(t)$ gibt an, wie viel CO_2 der Luft in Milligramm pro Stunde von der Tomatenpflanze näherungsweise verbraucht wird.

- In Abbildung 3 im Anhang sind drei Graphen der Funktionsschar f_a zu den Werten $a = 9$, $a = 11$ und $a = 13$ abgebildet. Entscheiden Sie mit Begründung, welcher Graph (durchgezogene, gestrichelte oder gepunktete Linie) zu welchem Wert gehört.
- Zeigen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil c), dass alle Funktionen der Funktionsschar f_a dieselben Nullstellen besitzen.
- Begründen Sie, warum es für diesen Sachzusammenhang sinnvoll ist, dass alle Funktionen der Funktionsschar f_a dieselben Nullstellen besitzen.
- Zum Zeitpunkt $t = 6{,}1$ ist die Änderung des CO_2-Verbrauchs am stärksten.
  Zeigen Sie hierfür die notwendige Bedingung mit Hilfe einer geeigneten Ableitung.

(8 Punkte)

Anhang

Abbildung 2: Messkurve

Quelle der Messkurve: http://www2.vobs.at/bio/botanik/b-photosynthese-2.htm, 08.06.2014

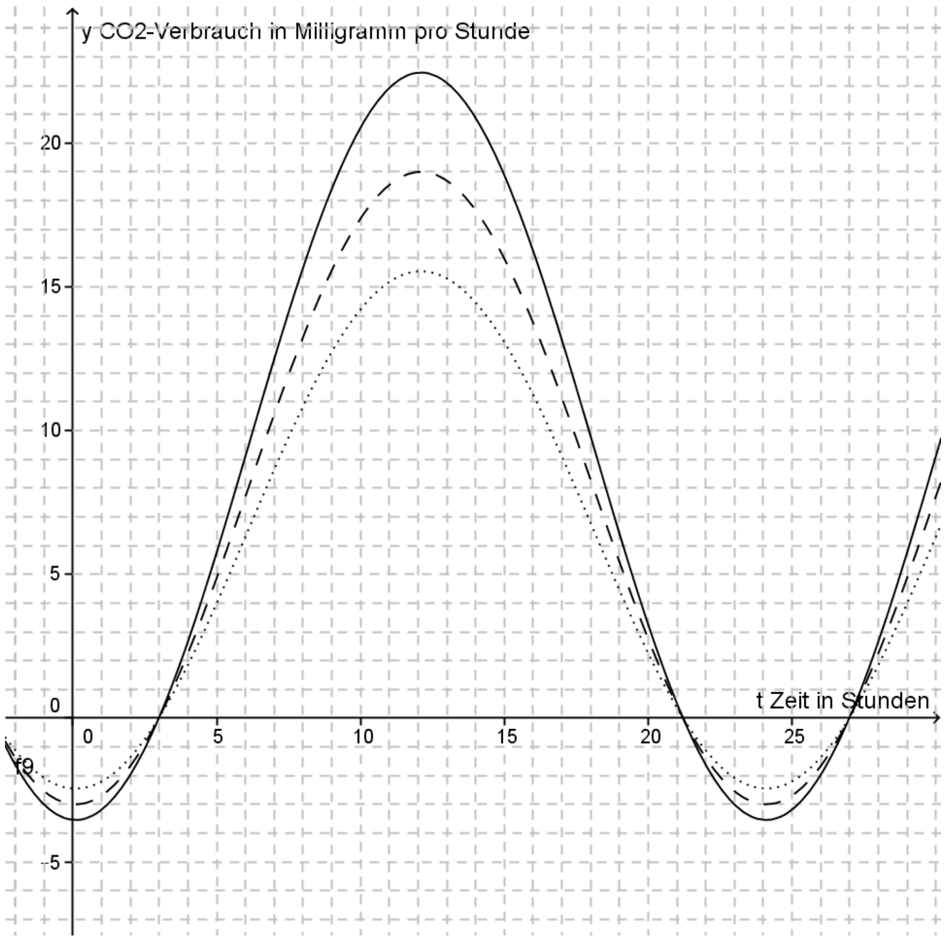


Abbildung 3: Graphen von drei Funktionen der Funktionsschar f_a

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra **GTR**

Steuergeräte

Die Firma Futurama produziert in zwei Phasen elektronische Steuergeräte für Maschinen.
In der ersten Phase werden aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 produziert. In der zweiten Phase werden aus diesen drei Zwischenprodukten die zwei Steuergeräte S_1 und S_2 produziert.
Die nachstehenden beiden Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Rohstoffe in je eine ME der Zwischenprodukte und wie viele ME der Zwischenprodukte in jeweils ein Steuergerät eingehen. Zu den Tabellen gehören die Matrizen B_{RZ} und C_{ZS} mit den entsprechenden Zahlen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	4	3
R_2	4	4	2
R_3	2	8	7

	S_1	S_2
Z_1	2	0
Z_2	1	1
Z_3	2	1

Gegeben ist die Matrix $D_{RS} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 16 & 6 \\ 26 & 15 \end{pmatrix}$.

a)

- Zeigen Sie mithilfe von Matrizenrechnung, dass die Matrix D_{RS} die ME der einzelnen Rohstoffe für jeweils ein Steuergerät beschreibt.
  Geben Sie dabei für ein beliebiges Matrixelement von D_{RS} den Berechnungsweg an.
- Berechnen Sie $D_{RS} * \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.
  Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Matrix-Vektor-Multiplikation im Sachzusammenhang.

Die Rohstoffkosten betragen $4{,}50$ € je ME von R_1, $2{,}50$ € je ME von R_2 und 4 € je ME von R_3.

- Berechnen Sie mithilfe von Matrix-Vektor-Operationen die Kosten für die Produktion von jeweils einem Steuergerät S_1 und einem Steuergerät S_2.

(7 Punkte)

b) Der Produktionsleiter erhält den Auftrag, 530 ME von R_1, 600 ME von R_2 und 990 ME von R_3 zu verbrauchen.

- Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenprodukte von Z_1 und Z_2, wenn genau 66 Zwischenprodukte von Z_3 produziert werden sollen.

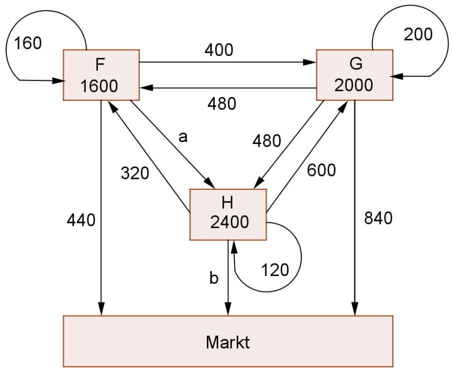
  Gegeben ist die Matrix-Vektorgleichung $B_{RZ} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 530 \\ 600 \\ 990 \end{pmatrix}$,

  wobei die Anzahl der Zwischenprodukte z_1, z_2 und z_3 wie üblich ganzzahlig und nicht negativ sind.
  Bestimmen Sie die Lösungsmenge der obigen Matrix-Vektorgleichung.

  (Zur Kontrolle: $L = \left\{ \begin{pmatrix} 35 + 0{,}5 z_3 \\ 115 - z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| z_3 \in \{0, 2, 4, ..., 114\} \right\}$)

- Interpretieren Sie die Lösungsmenge L bezogen auf den obigen Auftrag. (8 Punkte)

Futurama hat drei Produktionsstellen in Frankreich (F), Griechenland (G) und Holland (H). Das folgende Verflechtungsdiagramm beschreibt die Verflechtung der drei Produktionsstellen nach dem Leontief-Modell:



c)

- Bestimmen Sie die Parameter a und b.
- Erstellen Sie eine Input-Output-Tabelle (Verflechtungstabelle).
- Bestimmen Sie die Abgaben der drei Produktionsstellen an den Markt, wenn eine Gesamtproduktion je Produktionsstelle von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2200 \\ 3300 \\ 3700 \end{pmatrix}$ geplant ist.

(8 Punkte)

Durch stark veränderte technologische Bedingungen entsteht eine neue Verflechtung nach dem Leontief-Modell, welche mit Hilfe der folgenden Technologie-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,5 & 0,125 & 0,25 \end{pmatrix}$$ beschrieben wird.

Gegeben ist zudem die Matrix

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 46 & d & 36 \\ 20 & 8 & 16 \\ 34 & 12 & 28 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie A und $(E-A)^{-1}$ für die folgenden Aufgaben.

d)

- Bestimmen Sie den Parameter d so, dass die Matrix $(E-A)^{-1}$ die zugehörige Leontief-Inverse von $(E-A)$ ist.

(4 Punkte)

Für die folgende Aufgabe sei $d = 16$. Gegeben ist zudem der Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10-t \\ t^2 \end{pmatrix}$ mit dem Marktparameter $t \in [0;10]$.

e)

- Bestimmen Sie für $\vec{y}$ mit $t = 2$ den Produktionsvektor $\vec{x}$ und die dann entstehende Gesamtproduktion.
- Bestimmen Sie für den Marktvektor $\vec{y}$ den Wert des Parameters t, bei dem die Gesamtproduktion am geringsten wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

GTR

Garage

Eine Garage befindet sich neben einem Haus auf einer kleinen Anhöhe. Die Garageneinfahrt ist ein gerader Weg, der die Straße direkt mit der Garage verbindet.

Die Punkte A bis D und E bis H bilden die Eckpunkte der quaderförmigen Garage. Sie ist in Abbildung 2 (siehe Anhang) bereits eingezeichnet. An den Punkten I und J grenzt die Einfahrt der Garage an die Straße. Die Garageneinfahrt verläuft also von I und J aus zu den Punkten A und B der Garage.

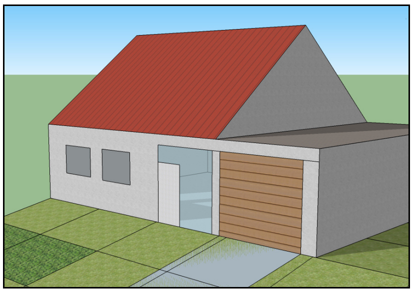


Abb.1: Garage mit Einfahrt

Alle Koordinaten der Punkte sind im Anhang aufgelistet. Eine Längeneinheit entspricht $1\,m$.

a)

- Zeichnen Sie nach den obigen Angaben die Garageneinfahrt (das Viereck $BAIJ$).
- Untersuchen Sie mit Hilfe von Berechnungen, welche Viereckform $BAIJ$ ist.

(5 Punkte)

b) Die Garageneinfahrt kann als Ausschnitt einer Ebene E_1 mit der Parametergleichung

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}$ dargestellt werden.

- Ermitteln Sie einen Normalenvektor zu E_1.
- Bestimmen Sie für E_1 eine Ebenengleichung in Koordinatenform.
- Für die Steigung von Garageneinfahrten gibt es Verordnungen, die von Bundesland zu Bundesland unterschiedlich sind. So ist z.B. für Bremen eine Steigung bis höchstens 20% für Garagen dieser Größe vorgeschrieben. Weisen Sie nach, dass die von uns betrachtete Garageneinfahrt nicht der Verordnung von Bremen entspricht.

(7 Punkte)

c) Im Punkt F der Garage befindet sich ein Bewegungsmelder, der nur dann eine Lampe am Haus einschalten soll, wenn jemand von der Straße aus das Grundstück betritt. Fußgänger, die auf der Straße am Haus vorbei gehen, sollen das Licht nicht aktivieren. Die Straße grenzt gradlinig an das Grundstück entlang der Punkte I und J (also ohne dazwischen liegenden Gehweg). Der Bewegungsmelder ist so eingestellt, dass er auf Bewegungen in $6\,m$ Entfernung (oder weniger) reagiert.

- Bestimmen Sie eine Geradengleichung für die Gerade g, die durch die Punkte I und J verläuft. Diese Gerade stellt den Verlauf des Straßenrands dar.
- Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem im Anhang.
- Bestimmen Sie den Abstand (also die geringste Entfernung) zwischen der Gerade g und dem Punkt F.
- Beurteilen Sie Ihr Ergebnis im Rahmen des Sachkontexts.

(9 Punkte)

d) Gegenüber der Garage steht ein mehrstöckiges Haus mit Balkonen. Ein Junge spielt dort auf einem der Balkone verbotenerweise mit einem Laserpointer. Ein Laserpointer ist ein Gerät, das einen Lichtpunkt dort erzeugt, wohin mit dem Lichtstrahl gezielt wird. Der Junge zielt auf das Garagentor. Das Garagentor wird durch das Rechteck $ABFE$ beschrieben. Der Lichtstrahl des Laserpointers ist gradlinig und wird hier durch die Geradenschar h_a mit

$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0{,}15a \\ -0{,}5a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Eine Längeneinheit entspricht $1\,m$.

- Erläutern Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf das Zielen mit dem Laserpointer hat.
- Zeigen Sie, dass das Garagentor in der Ebene E_2 mit der Koordinatenform $E_2: x_1 = 0$ liegt.
- Bestimmen Sie für $a = 8$ den Auftreffpunkt P_8, an dem der Laserpointer einen roten Lichtpunkt auf dem Garagentor erzeugt und zeichnen ihn in die Abbildung im Anhang.
- Zeigen Sie für $a = 4$, dass der Junge mit dem Lichtstrahl das Garagentor um $0{,}3\,m$ nach oben verfehlt.
- Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Wert von a, für den der Junge das Garagentor treffen wird.
- Begründen Sie, warum alle Geraden der Schar h_a eine Ebene bilden.

(12 Punkte)

Anhang:

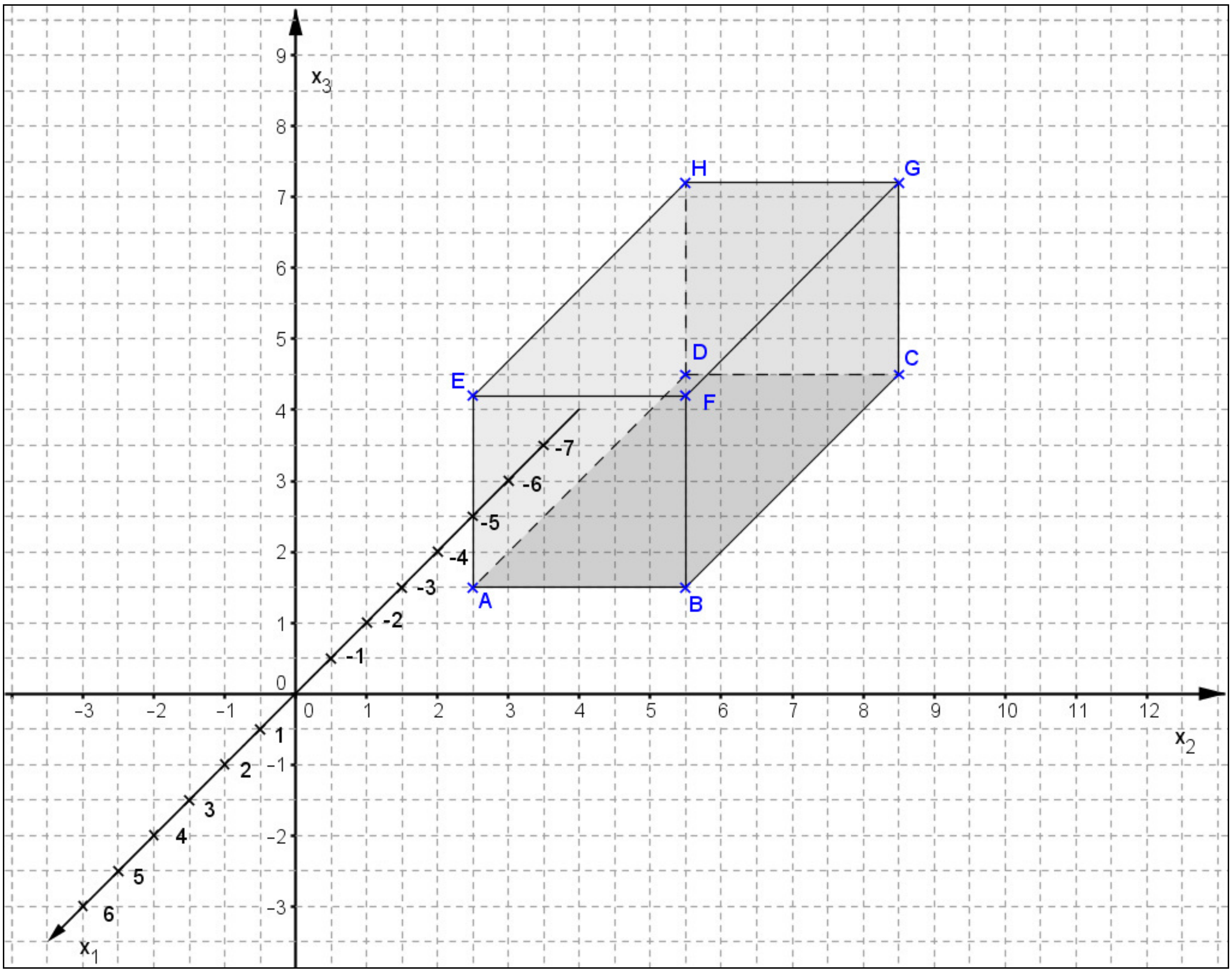


Abb. 2: Koordinatensystem mit bereits eingezeichneter Garage

Für die Aufgabe verwendete Punktkoordinaten:

Garage:

$A(0\,|\,2{,}5\,|\,1{,}5)$, $B(0\,|\,5{,}5\,|\,1{,}5)$, $C(-6\,|\,5{,}5\,|\,1{,}5)$, $D(-6\,|\,2{,}5\,|\,1{,}5)$

$E(0\,|\,2{,}5\,|\,4{,}2)$, $F(0\,|\,5{,}5\,|\,4{,}2)$, $G(-6\,|\,5{,}5\,|\,4{,}2)$, $H(-6\,|\,2{,}5\,|\,4{,}2)$

Grenzpunkte zwischen Einfahrt und Straße:

$I(5\,|\,3{,}5\,|\,0)$, $J(5\,|\,6{,}5\,|\,0)$

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik **GTR**

Internetsucht

Viele Jugendliche zeigen ein problematisches Verhalten im Umgang mit dem Internet. Die sogenannte PINTA-Studie für das Bundesministerium für Gesundheit untersuchte unter anderem die Internetsucht junger Deutscher im Alter von 14 bis 24 Jahren, die im Folgenden als „Jugendliche" bezeichnet werden. Der Studie zu Folge gelten rund $14\,\%$ der Jugendlichen als suchtgefährdet. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen genau.

a) Es werden 25 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. X gibt die Anzahl der suchtgefährdeten Jugendlichen an.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein suchtgefährdeter Jugendlicher dabei ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens fünf von ihnen suchtgefährdet sind.
- Bestimmen Sie $P(1 \leq X \leq 4)$ und erläutern Sie die Bedeutung des Werts im Sachzusammenhang.

Die Jugendlichen stellen einen Anteil von ca. $11\,\%$ an der deutschen Gesamtbevölkerung.

- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Deutscher ein Jugendlicher und zudem noch suchtgefährdet ist, ca. $1{,}5\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 zufällig ausgewählten Deutschen mindestens eine jugendliche und zudem noch suchtgefährdete Person ist.

(10 Punkte)

b) Für ein Interview wird ein suchtgefährdeter Jugendlicher gesucht. Dazu werden nun so lange Personen der entsprechenden Altersgruppe angesprochen, bis eine solche gefunden ist.

- Veranschaulichen Sie diesen Vorgang in einem Baumdiagramm. Zeichnen Sie das Baumdiagramm mit mindestens vier Stufen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die dritte angesprochene Person ein suchtgefährdeter Jugendlicher ist.

Y gibt die Anzahl der angesprochenen Personen an, bis ein suchtgefährdeter Jugendlicher gefunden wird.

- Berechnen Sie $P(Y > 3)$.
- Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie, wie viele Personen angesprochen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99\,\%$ ein suchtgefährdeter Jugendlicher gefunden ist.

(9 Punkte)

c) Die PINTA-Studie stammt aus dem Jahre 2011. Es wird vermutet, dass sich der Anteil der suchtgefährdeten Jugendlichen vergrößert hat. Dies soll mit einer Befragung von 500 Personen der entsprechenden Altersgruppe getestet werden.

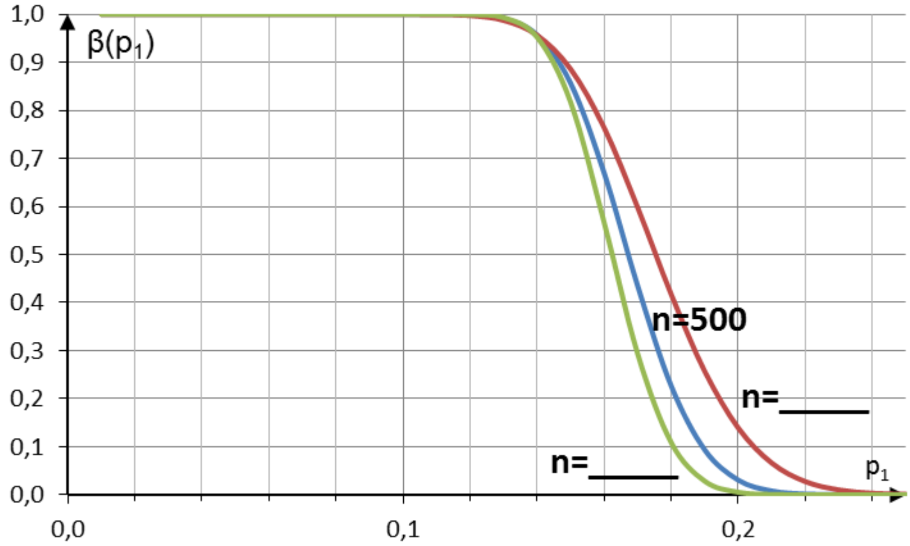
- Geben Sie eine sinnvolle Nullhypothese H_0 und eine dazu passende Gegenhypothese H_1 an.
- Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, wenn von einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ ausgegangen wird.

(7 Punkte)

d)

- Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers 2. Art von Aufgabenteil c) im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie für $n = 500$ und $p_1 = 0{,}16$ die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler der 2. Art. Wenn Sie im Aufgabenteil c) keinen Verwerfungsbereich bestimmt haben, nutzen Sie $V = \{84; ...; 500\}$.

In einer Operationscharakteristik (OC) wird jeder möglichen Wahrscheinlichkeit p_1 der Gegenhypothese H_1 die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art zugeordnet. Die folgende Abbildung zeigt die OC zum Test für $n = 300$, $n = 500$, und $n = 700$.



- Veranschaulichen Sie für $n = 500$ und $p_1 = 0{,}16$ die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler der 2. Art in der obigen Graphik.
- Geben Sie an, welche der noch nicht gekennzeichneten Kurven zu welchem Stichprobenumfang gehören.
- Erläutern Sie an Hand des Graphen, welche Vorteile ein Test mit größerem Stichprobenumfang n hat.
- Skizzieren Sie den Verlauf einer idealen OC in das obige Koordinatensystem.

(7 Punkte)