Schriftliche Abiturprüfung 2021

Leistungskurs Mathematik

Dienstag, 4. Mai 2021, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer:innen

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 80 Minuten (70 Minuten plus 10 Minuten Zeitzuschlag als Corona-Kompensation).
- Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon, Operatorenliste.

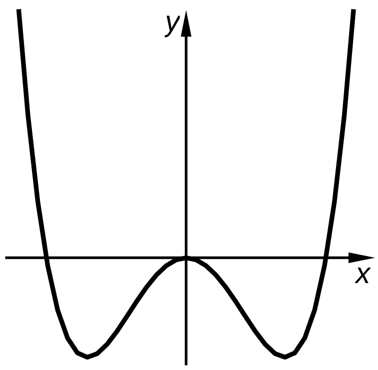
Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben, die alle bearbeitet werden müssen.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

BE

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit
$f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



a Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist 1

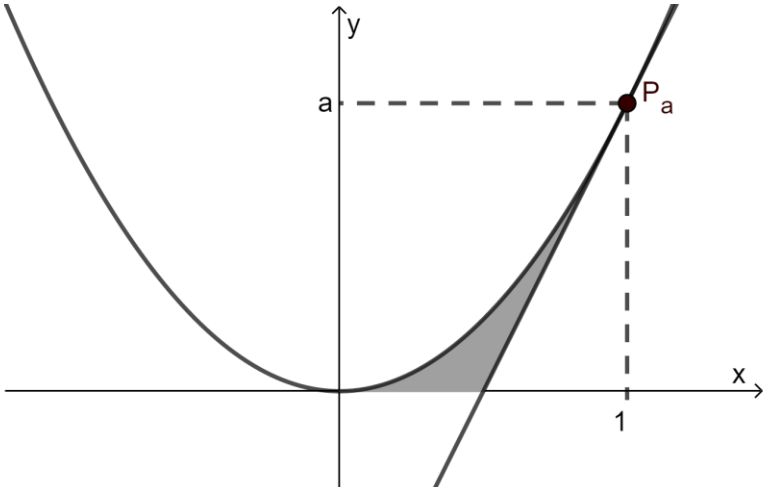
b Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1.
Ermitteln Sie den Wert von k. 4

5

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

BE

Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$ betrachtet. Der Punkt $P_a(1|a)$ liegt auf dem Graphen von f_a. Die Tangente an den Graphen von f_a durch den Punkt P_a hat die Gleichung $t_a(x) = 2a \cdot x - a$.



Die Abbildung zeigt den Graphen von f_a und die Tangente an den Graphen von f_a durch den Punkt P_a.
Sie ist nicht maßstabsgerecht.

a Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente t_a. 1

[*Zur Kontrolle:* 0,5]

b Die Tangente, der Graph der Funktion f_a und die x-Achse schließen eine Fläche ein (in der Abbildung grau markiert). Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche in Abhängigkeit von a. 4

5

Pflichtaufgabe: Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

BE

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit

$$f(x) = (x^3 - 3x + 2) \cdot e^x$$

sowie ihre zweite Ableitung f'' mit

$$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 3x - 4) \cdot e^x.$$

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass F an der Stelle $x = 1$ einen Sattelpunkt besitzt. (Ein Funktionsterm von F muss nicht bestimmt werden.) 5

5

Pflichtaufgabe: Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analysis

	BE
Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g. Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $(2\|1)$.	
a Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an.	2
b Untersuchen Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen.	3
	5

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Stochastik

BE

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und p. Der Erwartungswert von X ist 50. Die Verteilung ist symmetrisch zu diesem Erwartungswert.

a Berechnen Sie die Standardabweichung von X. 3

b Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 61)$ beträgt etwa 2 %. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$. 2

5

Teil 1 – Aufgabe 6 - zum Themenbereich Stochastik

	BE
In einer Firma wird davon ausgegangen, dass $\frac{1}{5}$ aller Krankmeldungen montags erfolgt.	
a Berechnen Sie bei drei Krankmeldungen die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis und zeigen Sie, dass dieser Wert über 10% liegt: A: „Mindestens zwei der Krankmeldungen erfolgen montags.“	3
b Untersuchen Sie, ab welcher Anzahl von Krankmeldungen die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis unter 1% liegt: B: „Alle Krankmeldungen erfolgen montags.“	2
	5

SNR: Kursbezeichnung:

Name:

Teil 1 – Aufgabe 7 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

	BE
Gegeben sind der Punkt $P(-1\|7\|2)$ und die Ebene $E\colon\ x_1 + 3 \cdot x_2 = 0$.	
a Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt.	1
b Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird.	4
	5

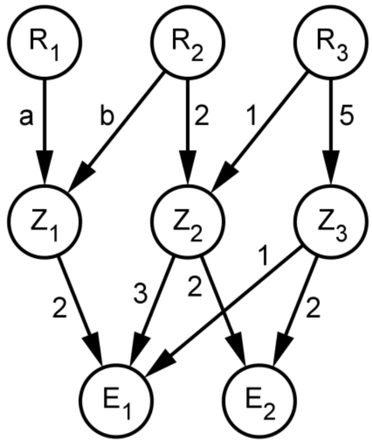
Teil 1 – Aufgabe 8 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

	BE
Betrachtet werden die Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 = 3$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Gerade $$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$	
a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Gerade g_a senkrecht zu E steht.	2
b Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den die Gerade g_a in E liegt.	3
	5

Teil 1 – Aufgabe 9 - zum Themenbereich Lineare Algebra

BE

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die Abbildung gibt, jeweils in Mengeneinheiten, für jedes Zwischenprodukt den Bedarf an Rohstoffen und für jedes Endprodukt den Bedarf an Zwischenprodukten an.



Für den Produktionsprozess gilt $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$.

Dabei gibt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Rohstoffe und der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Endprodukte an.

a Ausgehend von 8 Mengeneinheiten von R_1, 28 Mengeneinheiten von R_2 und r_3 Mengeneinheiten von R_3 werden Endprodukte hergestellt. Dabei bleiben keine Rohstoffe übrig. 3

Bestimmen Sie den Wert von r_3.

b Bestimmen Sie die Werte von a und b (vgl. Abbildung). 2

5

Teil 1 – Aufgabe 10 - zum Themenbereich Lineare Algebra

BE

Eine Käferpopulation durchläuft die drei Entwicklungsstadien Eier, Larven und Käfer. Die Zusammensetzung der Population wird durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} e \\ l \\ k \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei e die Anzahl der Eier, l die Anzahl der Larven und k die Anzahl der Käfer angeben. Die Entwicklung der Population von einem Monat n zum nächsten wird durch die Gleichung $M * \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad b,c \in \mathbb{R}; \quad 0 \leq b \leq 1; \quad 0 \leq c \leq 1$$

modelliert.

a Entscheiden Sie, welches der beiden folgenden Übergangsdiagramme nicht die Entwicklung der Population von einem Monat n zum nächsten beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

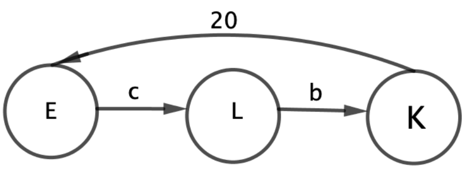


Abb. I

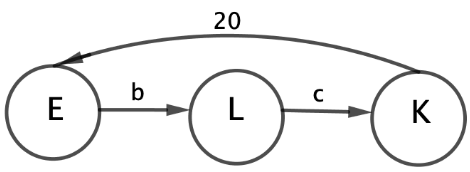


Abb. II

b Zeigen Sie, dass es nur unter der Bedingung $20 \cdot b \cdot c = 1$ eine Populationsverteilung geben kann, bei der die Anzahl der Tiere in jedem Monat innerhalb der einzelnen Entwicklungsstadien gleich bleibt. 3

5

SNR: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2021

Leistungskurs Mathematik (TR)

Dienstag, 4. Mai 2021, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer:innen

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 220 Minuten (200 Minuten plus 20 Minuten Zeitzuschlag als Corona-Kompensation).
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, dessen Betriebsfähigkeit der Prüfling gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon, Operatorenliste.

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben, die alle bearbeitet werden müssen.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Pflichtaufgabe: Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis **TR**

Dreieck und Funktionen

BE

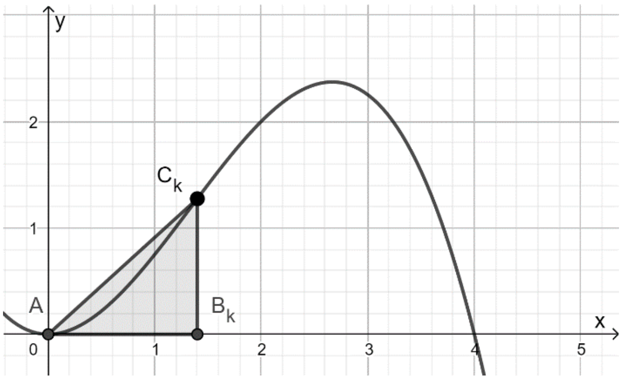
Gegeben ist in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$$

und den Nullstellen $x = 0$ und $x = 4$.

Für jedes $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k < 4$ liegt der Punkt $B_k(k \mid 0)$ auf der x-Achse und der Punkt $C_k(k \mid f(k))$ auf dem Graphen von f.

Diese beiden Punkte bilden zusammen mit $A(0 \mid 0)$ das Dreieck AB_kC_k.



Der Graph von f sowie das Dreieck $AB_{1,4}C_{1,4}$ sind in der Abbildung dargestellt.

a **Geben** Sie die Koordinaten von $B_{3,4}$ **an** und **berechnen** Sie die Koordinaten von $C_{3,4}$. — 3

Zeichnen Sie das Dreieck $AB_{3,4}C_{3,4}$ in das Koordinatensystem der Abbildung ein.

b **Begründen** Sie, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks AB_kC_k durch den folgenden Term berechnet werden kann: — 6

$$-\frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{2}k^3.$$

Es gibt ein Dreieck AB_kC_k mit maximalem Flächeninhalt. **Bestimmen** Sie das zugehörige k.

c **Bestimmen** Sie die Steigung der Geraden durch A und $C_{3,4}$. — 3

Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und ein C_k die Steigung

$$m_k = -\frac{1}{4}k^2 + k$$

besitzt.

d Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k < 4$, für das die Gerade durch A und C_k mit der Steigung m_k eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle k ist. — 3

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Rechnung k.

15

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis TR

Brücke

BE

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

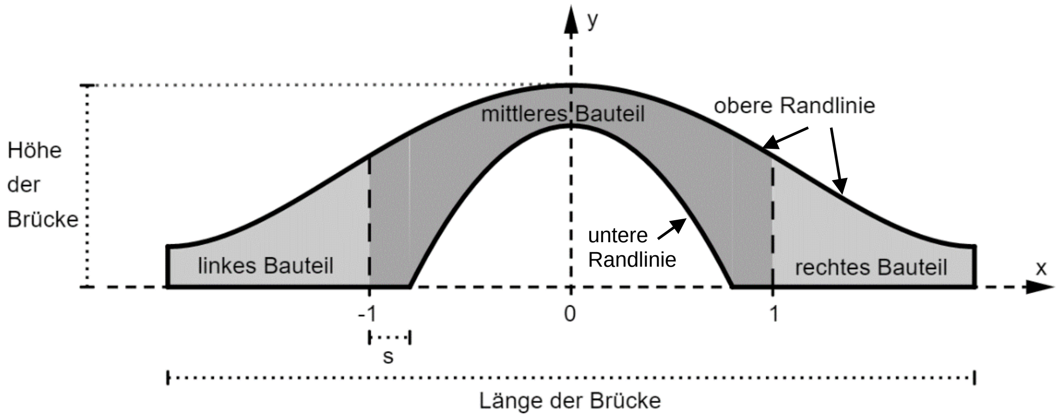


Abbildung 1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten zur y-Achse symmetrischen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$$

beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem verläuft der Boden horizontal entlang der x-Achse; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter (dm) in der Realität.

a **Bestimmen** Sie die Höhe und die Länge der Brücke. 5

(Zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

b **Interpretieren** Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang und **berechnen** Sie seinen Wert. 2

c Betrachtet wird eine von links kommende Spielzeugeisenbahn. Beim Überfahren bis zum höchsten Punkt muss sie eine steilste Stelle überwinden. 4

Berechnen Sie die Steigung dieser Stelle.

Der parabelförmige Ausschnitt zur Durchfahrt von Zügen im mittleren Bauteil soll variiert werden. Dafür werden für verschiedene a mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, verschiedene untere Randlinien getestet. Hierbei handelt es sich um Ausschnitte von Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g_a mit

$$g_a(x) = -a \cdot x^2 + 0{,}8\,.$$

d In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen eines derartigen mittleren Bauteils mit s bezeichnet. 4

Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern.

e **Begründen** Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. 2

Im Folgenden wird eine Brücke betrachtet, für die a = 1,25 gilt.

f Die Breite der Bauteile beträgt 0,4 dm. Die Nullstellen der Parabel liegen bei $x = \pm 0{,}8$. 4
Ermitteln Sie das Volumen des entsprechenden mittleren Bauteils.

g Am Ende des rechten Bauteils (bei $x = 2$) soll ein neues Bauteil knickfrei angesetzt werden, so dass die Spielzeugeisenbahn von der Brücke auf den Boden fahren kann (siehe Abbildung 2). 4

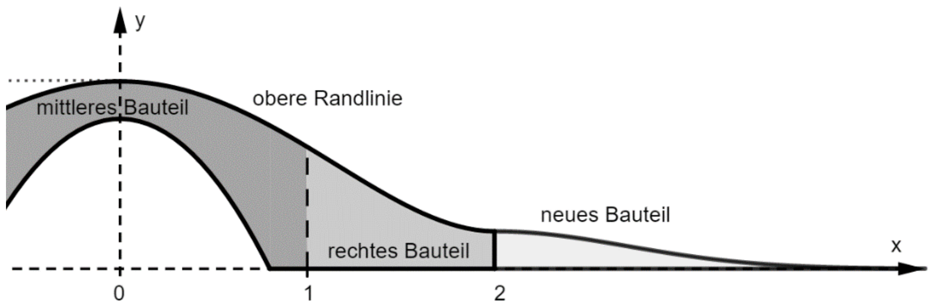


Abbildung 2

Die obere Randlinie des Längsschnittes des neuen Bauteils soll entlang eines Graphen verlaufen, der durch geeignete Verschiebung in x-Richtung und Stauchung des Graphen der Funktion h mit $h(x) = e^{-x^2}$ in y-Richtung entsteht. Der Graph der Funktion h ist in Abbildung 3 dargestellt.

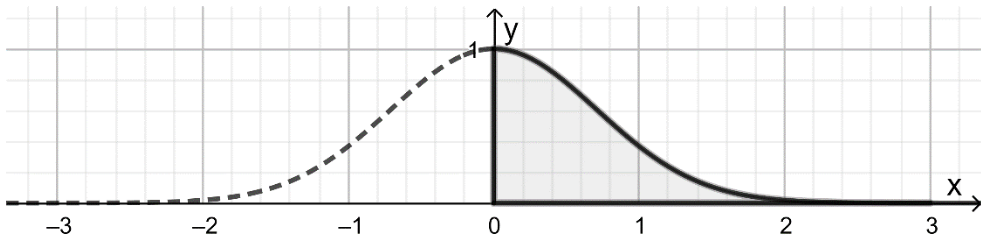


Abbildung 3

Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der den gestauchten und verschobenen Graphen beschreibt.

25

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis TR

Livestream

BE

Im Internet können Zuschauer per Livestream bei einem Computerspiel zusehen. Die Zuschauerzahl eines Livestreams kann mit Hilfe mathematischer Modelle dargestellt werden. Im Folgenden soll stets auf ganze Zuschauerzahlen gerundet werden.

a Der Computerspieler *FireX* hat zu Beginn seines Livestreams 5 Zuschauer. Nach 30 Minuten ist die Zuschauerzahl mit 130 am größten. Er beendet seinen Livestream nach 40 Minuten mit 80 Zuschauern. 4

Die in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f dritten Grades modelliert diesen Sachzusammenhang. Dabei ist t die Zeit in Minuten nach Beginn des Livestreams und der Funktionswert $f(t)$ entspricht der Zuschauerzahl zum Zeitpunkt t.

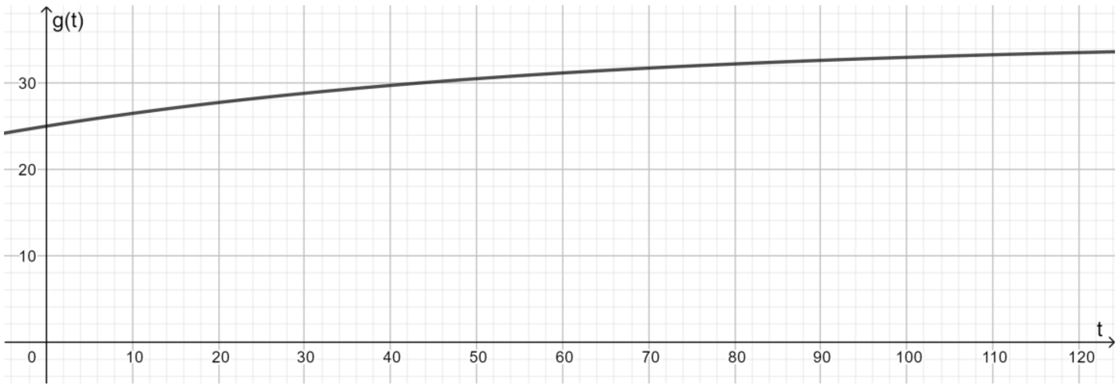
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit

$$g(t) = 35 - 10 \cdot e^{-0{,}016 \cdot t}$$

modelliert für $0 \le t \le 120$ die Zuschauerzahl eines Livestreams der Computerspielerin *GamerQueen*. Dabei ist t die Zeit in Minuten nach Beginn des Livestreams und g(t) stellt die Zuschauerzahl in Tausend zum Zeitpunkt t dar. Der betrachtete Livestream von *GamerQueen* dauert 120 Minuten.

Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



b **Berechnen** Sie die Differenz der Zuschauerzahlen von *GamerQueen* zwischen Start und Ende ihres Livestreams. 5

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Zuschauerzahl von 27000 überschritten wird.

c **Zeigen** Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $g'(t) > 0$. 3

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

d *GamerQueen* verdient durch Werbeeinblendungen Geld. Für jede angefangene Werbeminute wird ihr Verdienst in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Zuschauerzahl während dieser Minute wie folgt berechnet: 5

Durchschnittliche Zuschauerzahl während der Minute Werbeeinblendung	20.000 bis 26.999	27.000 bis 29.999	über 30.000
Einnahme pro Zuschauer (bezogen auf den Durchschnittswert oben) in dieser Minute in Euro	0,002	0,005	0,010

42 Minuten nach Start des Livestreams von *GamerQueen* gibt es eine Werbeeinblendung mit einer Dauer von zwei Minuten.

Ermitteln Sie die Einnahmen von *GamerQueen* für diese Werbeeinblendung.

e Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit 5

$$k(t) = 35 - \frac{1}{20}t + \frac{1}{2000}t^2 - 10 \cdot e^{-0{,}016 \cdot t}$$

modelliert für $0 \leq t \leq 120$ die Zuschauerzahl eines Livestreams des Computerspielers *KingPlay*. Dabei ist t die Zeit in Minuten nach Beginn des Livestreams und k(t) stellt die Zuschauerzahl <u>in Tausend</u> zum Zeitpunkt t dar. Der betrachtete Livestream von *KingPlay* dauert 120 Minuten. Er läuft zeitgleich zum Livestream von *GamerQueen*.

Berechnen Sie, wie viele Minuten nach Beginn des Livestreams die beiden Computerspieler die gleiche Zuschauerzahl haben und **geben** Sie diese Zuschauerzahl **an**.

f *GamerQueen* erhält das Angebot, dass zukünftig Zuschauer von anderen Computerspielern auf ihren Livestream umgeleitet werden. 3

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & \text{für } 0 \leq t \leq 90 \\ g(t) + 25 \cdot (t - 90), & \text{für } 90 \leq t \leq 120 \end{cases}$$

modelliert die Zuschauerzahl, die sich dadurch bei ihrem letzten Livestream ergeben hätte. Dabei ist t die Zeit in Minuten nach Beginn des Livestreams und h(t) stellt die Zuschauerzahl <u>in Tausend</u> zum Zeitpunkt t dar.

Beschreiben Sie, wie sich die Zuschauerzahl durch die Umleitung verändert hätte.

25

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Stochastik TR

Internetnutzer

BE

1 Für ein Land wird die Bevölkerungsgruppe der Erwachsenen betrachtet. In dieser Bevölkerungsgruppe beträgt der Anteil der Internetnutzer 88 %.

Die betrachtete Bevölkerungsgruppe besteht aus 60,7 Millionen Personen, von denen 16,4 Millionen mindestens 65 Jahre alt sind.

Der Anteil derjenigen, die mindestens 65 Jahre alt sind und das Internet nutzen, beträgt 17 %.

Aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersucht werden folgende Ereignisse:

A: „Die Person nutzt das Internet."

B: „Die Person ist mindestens 65 Jahre alt."

a **Stellen** Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**. 3

b **Untersuchen** Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. 3

c **Beschreiben** Sie das Ereignis $\overline{A} \cap B$ im Sachzusammenhang. 2

d **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person der betrachteten Bevölkerungsgruppe das Internet nutzt, wenn sie jünger als 65 Jahre ist. 2

In der betrachteten Bevölkerungsgruppe nutzen etwa 72 % das Internet mit einem Smartphone. Die Anzahl X der Personen, die das Internet mit einem Smartphone nutzen, wird als binomialverteilt angenommen.

e Aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe werden 100 Personen zufällig ausgewählt. Der Wert k stellt 3% des Erwartungswertes von X dar. 4

Bestimmen Sie k.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl X der Personen, die das Internet mit einem Smartphone benutzen, weniger als k vom Erwartungswert von X abweicht.

f **Ermitteln** Sie, wie viele Personen aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine dieser Personen das Internet mit einem Smartphone nutzt. 4

2 In einem anderen Land wird im Rahmen einer Umfrage eine Gruppe von 100 Erwachsenen gefragt, ob sie bei einer Dating-Plattform angemeldet sind. Die Anzahl der Erwachsenen dieser Gruppe, die angeben, bei einer Dating-Plattform angemeldet zu sein, wird im Folgenden mit der binomialverteilten Zufallsvariable Y bezeichnet.

a Ein rechtseitiger Hypothesentest hat die Nullhypothese H_0 :*„Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erwachsener angibt, bei einer Dating-Plattform angemeldet zu sein, beträgt höchstens 15%.“* 3

Der Test wird mit einem Signifikanzniveau von 5% durchgeführt.

Zeigen Sie, dass die Nullhypothese für Y>21 abgelehnt wird.

b Es wird davon ausgegangen, dass ein Erwachsener mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 15% angibt, bei einer Dating-Plattform angemeldet zu sein. 4

Außerdem ist bekannt, dass ein Erwachsener mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% eine falsche Aussage macht. Das gilt sowohl für die Erwachsenen, die bei einer Dating-Plattform angemeldet sind, als auch für die Erwachsenen, die bei keiner Dating-Plattform angemeldet sind.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 zufällig ausgewählte Erwachsene aus der beschriebenen Gruppe von 100 Erwachsenen tatsächlich bei einer Dating-Plattform angemeldet sind.

25

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie **TR**

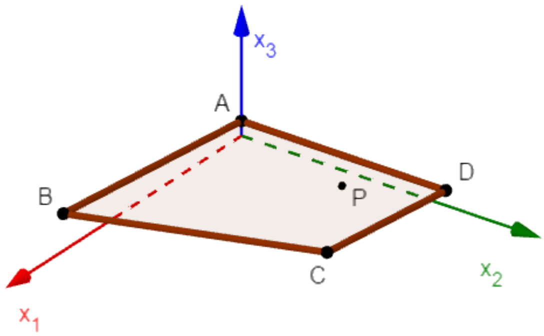
Rasen

BE

Die Punkte
$A(0|0|1)$, $B(18|0|2{,}5)$,
$C(12|15|2)$ und $D(0|15|1)$
stellen modellhaft die Eckpunkte einer Rasenfläche dar (vgl. Abbildung). Die Rasenfläche liegt in einer leicht schrägen Ebene.

Die x_3-Achse zeigt senkrecht zum Himmel.

Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



a **Zeigen** Sie, dass $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und dass $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$ einen rechten Winkel einschließen. 5

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Rasenfläche.

b Die Rasenfläche befindet sich in einer Ebene R. 4

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene R in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $R: -x_1 + 12x_3 = 12$*)*

Die Rasenfläche wird von einem Roboter gemäht. In der Bedienungsanleitung steht, dass der Roboter nur Rasenflächen mit einer maximalen Steigung von 30% mähen kann.

c **Untersuchen** Sie, ob der Roboter diese Rasenfläche mähen kann. 3

Der Roboter hat die Form eines flachen Zylinders. Zur Beschreibung der Bewegung des Roboters wird der Mittelpunkt seiner kreisförmigen Unterseite betrachtet. Es soll vereinfachend davon ausgegangen werden, dass dieser Mittelpunkt die Rasenfläche berührt.

Die Position des Mittelpunkts wird zunächst durch $P(3{,}6|10|1{,}3)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die anschließende Bewegung des Mittelpunkts verläuft im Modell entlang der Gerade g, die durch P verläuft und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Dabei bewegt sich der Roboter auf den durch $\overline{BC}$ dargestellten Rand der Rasenfläche zu.

d **Berechnen** Sie die Koordinaten des Punkts Q, in dem g die Gerade durch B und C schneidet. 5

(zur Kontrolle: $Q(15{,}6|6|2{,}3)$*)*

e **Berechnen** Sie den Winkel, unter dem sich der Roboter dem Rand der Rasenfläche nähert. 3

f Der Roboter ändert seine Richtung, sobald der Rand seiner Unterseite den Rand der Rasenfläche berührt. Der Berührungspunkt wird mit T bezeichnet. Der Punkt, der die Position des Mittelpunkts im Moment der Richtungsänderung darstellt, wird mit S bezeichnet. Die Koordinaten von S auf zwei Nachkommastellen gerundet sind $S(15{,}35 \mid 6{,}08 \mid 2{,}28)$. 5

Bestimmen Sie die Koordinaten von T und den Radius der kreisförmigen Unterseite des Roboters.

25

Teil 2 – Aufgabe 6 - zum Themenbereich Lineare Algebra **TR**

Wildkatzen

BE

1 Um die Ausbreitung der Europäischen Wildkatze in Deutschland zu unterstützen, haben Tierschützer zwischen den Wäldern, in denen Wildkatzen leben, sogenannte grüne Korridore aus Büschen angelegt. Diese Korridore ermöglichen den Wildkatzen zwischen den Wäldern zu wandern.

Zunächst wird das Wanderverhalten der Wildkatzen zwischen den Wäldern A, B und C betrachtet. Die Verteilung der Wildkatzen auf die drei Wälder kann durch

Vektoren der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dargestellt werden, wobei a, b und c die Anzahlen der Wildkatzen in den Wäldern A, B bzw. C angeben.

Das Wanderverhalten von einem Jahr n zum nächsten wird modellhaft durch die Gleichung

$\overrightarrow{v_{n+1}} = M * \overrightarrow{v_n}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}28 & 0{,}6 & 0{,}18 \\ 0{,}27 & 0{,}3 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Runden Sie Ihre Endergebnisse stets auf ganze Tieranzahlen.

a Stellen Sie das beschriebene Wanderverhalten in einem Übergangsdiagramm dar. 3

Zu Beginn der Beobachtung leben 100 Wildkatzen im Wald A, 110 im Wald B und 425 im Wald C.

b Ermitteln Sie, wie sich die Wildkatzen drei Jahre nach Beobachtungsbeginn auf die Wälder verteilen. 2

c Für die Matrix G mit $G \approx \begin{pmatrix} 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 \\ p & p & p \\ 1-0{,}129-p & 1-0{,}129-p & 1-0{,}129-p \end{pmatrix}$, wobei $0 \le p \le 1$

gilt die Gleichung $M * G = G$.

Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung den Wert für p. 4

Interpretieren Sie den Wert p im Sachzusammenhang.

d Aufgrund von Tierschutzmaßnahmen im Wald A hat sich der Anteil der Wildkatzen, die von einem Jahr zum nächsten dort verbleiben, auf 70% erhöht. Es soll davon ausgegangen werden, dass sich durch die Maßnahmen die Abwanderungsraten der Tiere aus Wald A ebenfalls verändern. Das Wanderverhalten der Tiere in Wald B und C sowie die Gesamtanzahl der Tiere in den drei Wäldern verändern sich hingegen nicht. 4

Ermitteln Sie, wie groß die Abwanderungsraten aus dem Wald A sein müssten, damit sich eine Verteilung der Wildkatzen, bei der 135 Tiere in Wald A und die restlichen 500 Tiere in Wald B und Wald C leben, nicht mehr ändert.

Zu Beginn eines Jahres wird das Wandergebiet der Wildkatzen durch weitere grüne Korridore um den Wald D erweitert. Die Verteilung der Wildkatzen auf die vier Wälder wird im entsprechend erweiterten Modell durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ beschrieben, ihr Wanderverhalten durch die Matrix $N = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Unmittelbar nach der Erweiterung des Wandergebiets um den Wald D leben 115 Wildkatzen im Wald A, 200 im Wald B, 320 im Wald C und 70 im Wald D.

Um die Ausbreitung der Wildkatzen weiter zu fördern, werden nach der beschriebenen Wanderung am Ende jedes Jahres in jedem der vier Wälder zwei zusätzliche Wildkatzen ausgesetzt.

e Bestimmen Sie die Verteilung der Wildkatzen am Ende des zweiten Jahres nach der Erweiterung. 3

f Geben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms 3

$$N^3 * \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + \left(N^2 + N + E\right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ an, wobei E die passende Einheitsmatrix ist.

Begründen Sie Ihre Angabe.

2 In einem abgeschlossenen Waldgebiet wird untersucht, wie sich eine Population weiblicher Wildkatzen entwickelt. Die Zusammensetzung der Population wird durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} w \\ j \\ e \end{pmatrix}$ dargestellt; dabei ist w die Anzahl der Welpen, j die Anzahl der Jungtiere und e die Anzahl der erwachsenen Tiere.

Die Entwicklung der Population von einem <u>Halbjahr</u> r zum nächsten kann modellhaft durch die Gleichung $\overrightarrow{w_{r+1}} = P * \overrightarrow{w_r}$ mit $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Zu Beginn der Untersuchung befinden sich im Waldgebiet ausschließlich acht Jungtiere und acht erwachsene Tiere.

a Zeigen Sie, dass das Modell zur Beschreibung der Entwicklung der Population vor Beginn der Untersuchung nicht geeignet ist. 2

b Die jährliche Entwicklung der Anzahl der Welpen kann ab dem Zeitpunkt zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, welche die Anzahl der Welpen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach Beginn der Untersuchung für $t \geq 2$ beschreibt. 4

25

Schriftliche Abiturprüfung 2021

Leistungskurs Mathematik (TR)

Dienstag, 4. Mai 2021, 9:00 Uhr

Unterlagen für Referent:innen und Korreferent:innen

- Diese Unterlagen sind nicht für Schüler:innen bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schüler:innen auf ihre Voll-ständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwer-wiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421 361...)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien" Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 80 Minuten (70 Minuten plus 10 Minuten Zeitzuschlag als Corona-Kompensation).
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon, Operatorenliste.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 220 Minuten (200 Minuten plus 20 Minuten Zeitzuschlag als Corona-Kompensation).
  Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formel-sammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon, Operatorenliste.
- **Auswahl der Aufgaben:**
- Für **Teil 1** der Prüfung, für die „hilfsmittelfreien" Aufgaben, gibt es **zwei Aufgaben** aus dem Themenbereich **Analysis**, die **fest vorgegeben** sind; es handelt sich um die **Aufgaben 3 und 4,** die mit „Pflichtaufgabe" gekennzeichnet sind. Darüber hinaus gibt es **acht** weitere Aufgaben, je zwei Aufgaben zu den Themenbereichen **Analysis**, **Stochastik**, **Lineare Al-gebra / Analytische Geometrie** (Schwerpunkt Lineare Algebra) sowie **Lineare Algebra / Analytische Geometrie** (Schwerpunkt Analytische Geometrie). Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien" Teil aus den

weiteren **acht** vorgelegten Aufgaben **vier** zur Bearbeitung aus. Die Schüler:innen erhalten die **zwei fest vorgegebenen Aufgaben 3 und 4** zum Themenbereich Analysis und die **vier ausgewählten Aufgaben** zur Bearbeitung.

- Für **Teil 2** der Prüfung, für die Aufgaben mit Hilfsmitteln, gibt es **eine** Aufgabe aus dem Bereich **Analysis** mit 15 Bewertungseinheiten, die **fest vorgegebenen** ist; es handelt sich um die **Aufgabe 1**, die mit „Pflichtaufgabe" gekennzeichnet ist. Darüber hinaus gibt es **fünf** weitere Aufgaben mit jeweils 20 Bewertungseinheiten, und zwar zwei Aufgaben zum Themenbereich **Analysis** und je eine Aufgabe zu den Themenbereichen **Stochastik**, **Lineare Algebra / Analytische Geometrie** (Schwerpunkt Lineare Algebra) und **Lineare Algebra / Analytische Geometrie** (Schwerpunkt Analytische Geometrie). Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten von den **fünf** weiteren Aufgaben **drei** Aufgaben zur Bearbeitung aus. Die Schüler:innen erhalten die **eine fest vorgegebene Aufgabe 1** zum Themenbereich Analysis und **die drei ausgewählten Aufgaben** zur Bearbeitung. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüfer:in und Korreferent:in und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schüler:innen und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schüler:innen auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 1				
a	$f'(x)=4\cdot x^3-2\cdot k\cdot x=2\cdot x\cdot(2\cdot x^2-k)$	1		
b	Für $x\neq 0$ ergibt sich: $2\cdot x^2-k=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{k}{2}}\vee x=\sqrt{\frac{k}{2}}$ Für $k>0$ gilt: $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=\frac{k^2}{4}-k\cdot\frac{k}{2}=-\frac{k^2}{4}=-1\Leftrightarrow k=2$	1	3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

		I	II	III
Aufgabe 2				
a	$0=2ax-a$ $\Rightarrow x=0{,}5$	1		
b	$\int_0^1 f_a(x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot a=\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1-\frac{1}{4}a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}a=\frac{1}{12}a$	1	3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

		I	II	III
Aufgabe 3				
	$f'(x)=(3x^2-3)\cdot e^x+(x^3-3x+2)\cdot e^x=(x^3+3x^2-3x-1)\cdot e^x$ $F'(1)=f(1)=0$ $F''(1)=f'(1)=0$ $F'''(1)=f''(1)=6e\neq 0$		2	3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche			**2**	**3**

		I	II	III
Aufgabe 4				
a	Der Graph von f hat den Hochpunkt $(-2\mid 1)$, der Graph von g den Tiefpunkt $(-2\mid -1)$.	1	1	
b	$h(-x)=f(-x)\cdot(g(-x))^3=f(x)\cdot(-g(x))^3=-f(x)\cdot(g(x))^3=-h(x)$ Damit ist der Graph von h symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.			3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**1**	**3**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 5				
a	$100 \cdot p = 50 \Leftrightarrow p = 0{,}5$ Damit ergibt sich für die Standardabweichung $\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$.	2	1	
b	$P(40 \le X \le 60) \approx 100\% - 2 \cdot 2\% = 96\%$		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

Aufgabe 6				
a	$n = 3,\ p = \frac{1}{5}$ $P(A) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{12}{125} + \frac{1}{125} = \frac{13}{125} > \frac{13}{130} = 0{,}10$	2	1	
b	n: Anzahl der zufälligen Krankmeldungen, $p = \frac{1}{5}$ $P(B) = \left(\frac{1}{5}\right)^n < 0{,}01$ Wegen $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}04$ und $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}008$ muss gelten $n \ge 3$.		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

Aufgabe 7				
a	$-1 + 3 \cdot 7 \neq 0$	1		
b	Die Gerade g, die senkrecht zu E durch P verläuft, kann mit Hilfe der folgende Parametergleichung dargestellt werden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$. Für den Durchstoßpunkt von g und E gilt $(-1 + t) + 3 \cdot (7 + 3 \cdot t) = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Mit $2t = -4$ ergibt sich der Ortsvektor des gesuchten Punkts: $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.	1	3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

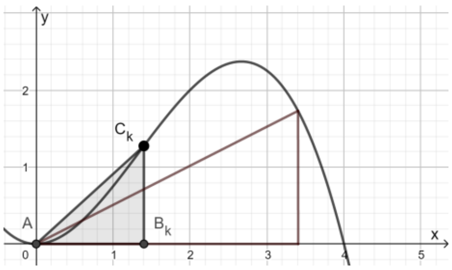
Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
Aufgabe 8				
a	Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $r = 2$ und somit $a = -3$.	1	1	
b	Wegen $1-(-2)+0=3$ gilt $(1 \mid -2 \mid 0) \in E$. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ liefert die Gleichung $2-1-a+2=0$. Da diese Gleichung lösbar ist, gibt es einen Wert von a, für den g_a in E liegt.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

Aufgabe 9				
a	Mit $4 \cdot e_1 = 8 \Leftrightarrow e_1 = 2$ ergibt sich $12 \cdot 2 + 4 \cdot e_2 = 28 \Leftrightarrow e_2 = 1$, d. h. $r_3 = 8 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 28$	2	1	
b	$2 \cdot a = 4 \Leftrightarrow a = 2$, $2 \cdot b + 3 \cdot 2 = 12 \Leftrightarrow b = 3$		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

Aufgabe 10				
a	Abb. I beschreibt nicht die Entwicklung der Population von einem Monat n zum nächsten. b, der Anteil der Eier, der sich zu Larven entwickelt, wurde hier als Überlebensrate der Larven eingetragen.	1	1	
b	Mit $M * \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_n}$ ergibt sich: $\left\| \begin{matrix} 20k = e \\ e \cdot b = l \\ c \cdot l = k \end{matrix} \right\| \Rightarrow 20 \cdot b \cdot c = 1$.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	

Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a</td><td>$B_{3,4}(3{,}4\,|\,0)$ und $C_{3,4}(3{,}4\,|\,1{,}734)$

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td>Die Grundseite des Dreiecks AB_kC_k hat die Länge k und die Höhe $f(k)$.
Damit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks
$$\frac{k\cdot f(k)}{2}=\frac{k\cdot\left(-\frac{1}{4}k^3+k^2\right)}{2}=-\frac{1}{8}k^4+\frac{1}{2}k^3.$$
Für die mithilfe dieses Terms in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit
$$g(x)=-\frac{1}{8}k^4+\frac{1}{2}k^3$$
gilt
$$g'(k)=-\frac{1}{2}k^3+\frac{3}{2}k^2$$
und
$$g'(k)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}k^3+\frac{3}{2}k^2=0\Leftrightarrow k=0\vee k=3.$$
Es folgt, dass für $k=3$ der Flächeninhalt maximal ist.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td>$\frac{f(3{,}4)}{3{,}4}=0{,}51$
Das Dreieck AB_kC_k ist ein Steigungsdreieck dieser Geraden. Somit lässt sich deren Steigung durch
$$\frac{f(k)}{k}=-\frac{1}{4}k^2+k$$
berechnen.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td>$f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x$
Für die gesuchte Stelle k muss die Steigung von f gleich der Steigung der Geraden durch A und C_k sein, das heißt $f'(k)=m_k$. Es folgt
$$f'(k)=m_k\Leftrightarrow -\frac{3}{4}k^2+2k=-\frac{1}{4}k^2+k\Leftrightarrow k=2$$</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Verteilung der insgesamt 15 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>3</td><td>9</td><td>3</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	Lösungsskizze	I	II	III
a	$f'(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{4}{5}x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-2$ In Verbindung mit der Abbildung 1 ergibt sich … • aus $f(0)=1$, dass die Höhe 1 dm beträgt und • aus den x-Koordinaten der Tiefpunkte -2 und 2, dass die Brücke 4 dm lang ist.	5		
b	Der Term gibt für das rechte Bauteil die mittlere Steigung der oberen Randlinie an. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-\frac{9}{20}$		2	
c	$f''(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\approx 0{,}62$ Damit ist die größte Steigung 0,62.		4	
d	$g_a(-0{,}9)=0{,}8-a\cdot(-0{,}9)^2\leq 0 \Leftrightarrow a\geq\frac{80}{81}$			4
e	Je größer der Wert von a ist, desto schmaler ist der Graph von g_a und damit die Durchfahrt der Brücke. Wird der Wert von a zu groß, kann kein Zug mehr hindurchfahren.		2	
f	$2\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^{0{,}8} g_{1{,}25}(x)\,dx\right)=0{,}9$ Volumenberechnung: $0{,}9\,dm^2\cdot 0{,}4\,dm=0{,}36\,dm^3$		4	
g	Um einen knickfreien Anschluss an das rechte Bauteil garantieren zu können, muss an der Stelle $x=2$ die Steigung 0 sein. Aufgrund des Hochpunktes des Graphen der Funktion h an der Stelle $x=0$, erfüllt man diese Bedingung durch Verschiebung des Graphen der Funktion h entlang der x-Achse um zwei. Die Höhe des rechten Bauteils an der Stelle $x=2$ beträgt 0,2 dm. Da der Hochpunkt des Graphen der Funktion h die y-Koordinate 1 hat, muss der Graph der Funktion h mit dem Faktor 0,2 gestaucht werden. Damit ergibt sich als Funktionsterm $0{,}2\cdot e^{-(x-2)^2}$.			4
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**5**	**12**	**8**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	Lösungsskizze	I	II	III
a	$f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ $f'(t)=3at^2+2bt+c$ $f(0)=5 \quad \Rightarrow d=5$ $f(30)=130 \;\Rightarrow 30^3a+30^2b+30c+d=130$ $f'(30)=0 \quad \Rightarrow 3\cdot 30^2a+2\cdot 30b+c=0$ $f(40)=80 \quad \Rightarrow 40^3a+40^2b+40c+d=80$ $\Rightarrow a=-\frac{13}{1440} \wedge b=\frac{29}{72} \wedge c=\frac{5}{24} \wedge d=5$		4	
b	$g(120)-g(0)\approx 8{,}534$ Die Differenz beträgt 8534 Zuschauer. $27=35-10\cdot e^{-0{,}016t}$ $\Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{27-35}{-10}\right)}{-0{,}016}\approx 14$ Das heißt, nach etwa 14 Minuten ist die Zuschauerzahl überschritten.	5		
c	$g'(t)=0{,}16\cdot e^{-0{,}016\cdot t}$ Da $e^k>0$ für alle $k\in\mathbb{R}$, ist $g'(t)>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass die Anzahl der Zuschauer während des Livestreams stets zunimmt.		3	
d	Die durchschnittliche Anzahl der Zuschauer pro Minute beträgt während der jeweiligen Minute der Werbeeinblendung: $\frac{1}{43-42}\cdot\int_{42}^{43} g(t)\,dt\approx 29{,}934$ $\frac{1}{44-43}\cdot\int_{43}^{44} g(t)\,dt\approx 30{,}014$ Damit ergeben sich Werbeeinnahmen von: $29934\cdot 0{,}005+30014\cdot 0{,}01\approx 449{,}81[€]$.			5
e	$g(t)=k(t)\Leftrightarrow 0=\frac{1}{20}t+\frac{1}{2000}t^2\Leftrightarrow t=0\vee t=100$ $g(0)=35$ $g(100)=32{,}981$ Nach 0 Minuten sind es 35000 und nach 100 Minuten 32981 Zuschauer.		5	
f	Bis zur 90. Minute bleibt die Zuschauerzahl gleich dem alten Modell. Ab der 90. Minute kommen zusätzlich 25.000 Zuschauer pro Minute hinzu.			3
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**5**	**12**	**8**

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

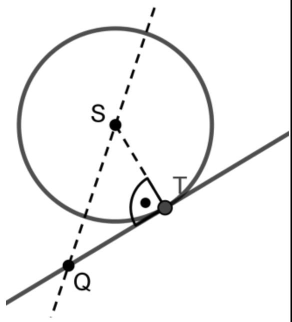
Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		Lösungsskizze	I	II	III
1	**a**	<table><tr><td></td><td>A</td><td>$\overline{A}$</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>17 %</td><td>10 %</td><td>27 %</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>71 %</td><td>2 %</td><td>73 %</td></tr><tr><td></td><td>88 %</td><td>12 %</td><td>100 %</td></tr></table>	3		
	b	$P(A)\cdot P(B)=0{,}88\cdot\frac{16{,}4}{60{,}7}\approx 24\%$; $P(A\cap B)=17\%$ Mit $P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)$ ergibt sich, dass A und B nicht stochastisch unabhängig sind.		3	
	c	Die Person ist mindestens 65 Jahre alt und nutzt das Internet nicht.	2		
	d	$P\left(A\middle\vert\overline{B}\right)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{71\%}{73\%}\approx 97\%$		2	
	e	Mit dem Erwartungswert $E(X)=0{,}72\cdot 100=72$ und $k=3\%\cdot 72\approx 2{,}2$ ergibt sich $P_{0,72}^{100}(70\leq X\leq 74)=P_{0,72}^{100}(X\leq 74)-P_{0,72}^{100}(X\leq 69)\approx 42\%$.		4	
	f	Gesucht ist der kleinste Wert von n, für den $1-(1-0{,}72)^n>99\%$ gilt. Aus $1-(1-0{,}72)^3<99\%$ und $1-(1-0{,}72)^4>99\%$ folgt, dass mindestens vier Personen ausgewählt werden müssen.			4
2	**a**	Der Fehler erster Art darf selbst bei der größten Wahrscheinlichkeit, die im Rahmen der Nullhypothese liegt, höchstens 5 % betragen. $P_{0,15}^{100}(Y>21)=1-P_{0,15}^{100}(Y\leq 21)\approx 0{,}039<5\%$		3	
	b	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person der Gruppe bei einer Dating-Plattform angemeldet ist, beträgt $0{,}15\cdot(1-0{,}06)+(1-0{,}15)\cdot 0{,}06=0{,}192$. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $0{,}192^3\approx 0{,}7\%$.			4
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**5**	**12**	**8**

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

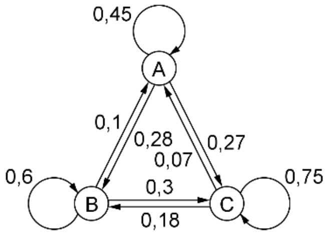
Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	Lösungsskizze	I	II	III
a	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Flächeninhalt der Rasenfläche: $\frac{\left(\lvert\overline{AB}\rvert + \lvert\overline{CD}\rvert\right) \cdot \lvert\overline{AD}\rvert}{2} = \frac{75 \cdot \sqrt{145}}{4} \approx 225{,}8 \ \left[m^2\right]$	5		
b	Ansatz für die Koordinatengleichung der Ebene: $R: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$. Durch Einsetzen der Koordinaten von A, B, D ergibt sich das folgende Gleichungssystem: $\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 1 \\ a \cdot 18 + b \cdot 0 + c \cdot 2{,}5 = 1 \\ a \cdot 0 + b \cdot 15 + c \cdot 1 = 1 \end{cases}$ mit der Lösung $a = -\frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = 1$, $R: -\frac{1}{12} x_1 + x_3 = 1$		4	
c	Die zu bewältigende Steigung kann mithilfe des Steigungsdreiecks ABB' berechnet werden, da $\overline{AD}$ parallel zur x_2-Achse ist. Dabei stellt B' die vertikale Projektion von B auf die Parallele zur x_1-Achse durch den Punkt A dar. Die Steigung des Steigungsdreiecks ist $\frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{1{,}5}{18} = 0{,}08\overline{3}$. Aus $0{,}08\overline{3} < 0{,}3$ folgt, dass der Roboter diese Rasenfläche mähen kann.			3
d	Die Gleichung der Geraden g ist: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 10 \\ 1{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Gerade BC ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 10 \\ 1{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $12s + 6t = 14{,}4$ II $4s + 15t = 10$ III $s + 0{,}5t = 1{,}2$ Aus I und II ergibt sich $s = 1$ und damit $Q(15{,}6 \mid 6 \mid 2{,}3)$.		5	

	Lösungsskizze	I	II	III
e	$\cos\alpha = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\sqrt{36+225+0{,}25} \cdot \sqrt{144+16+1}}$ liefert $\alpha \approx 50^\circ$.		3	
f	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = -0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 1 \end{pmatrix}$  Zunächst wird die Ebene E betrachtet, die orthogonal zu BC ist und den Punkt S enthält. Ansatz: $E: 12x_1 - 30x_2 + x_3 = d$. Einsetzen der Koordinaten von S liefert: $d = 12 \cdot 15{,}4 - 30 \cdot 6{,}1 + 2{,}3 = 4{,}1$. Insgesamt: $E: 12x_1 - 30x_2 + x_3 = 4{,}1$. T liegt auf der Geraden durch B und C und auf der Ebene E, so folgt für den zu T zugehörigen Geradenparameter t: $12 \cdot (18-6t) - 30 \cdot (15t) + (2{,}5 - 0{,}5t) = 4{,}1 \Leftrightarrow t \approx 0{,}41$. Damit ist $T(15{,}54 \mid 6{,}15 \mid 2{,}30)$. Radius: $\left\lvert\overrightarrow{ST}\right\rvert = \left\lVert \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}07 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} \right\rVert \approx 0{,}20$ [m].			5
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**5**	**12**	**8**

Teil 2 – Aufgabe 6 Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		Lösungsskizze	I	II	III
1	**a**		3		
	b	$M^3 * \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 425 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 82 \\ 204 \\ 349 \end{pmatrix}$	2		
	c	Wegen $M*G=G$ ergibt sich beispielsweise folgende Gleichung: $0{,}45\cdot 0{,}129+0{,}1\,p+0{,}07\cdot(0{,}871-p)=0{,}129 \Rightarrow p\approx 0{,}333$. Der Wert p ist der langfristige prozentuale Anteil der Wildkatzen in Wald B.		4	
	d	$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}07 \\ y & 0{,}6 & 0{,}18 \\ z & 0{,}3 & 0{,}75 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 135 \\ b \\ 500-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ b \\ 500-b \end{pmatrix}$ liefert in der ersten Zeile: $94{,}5+0{,}1b+35-0{,}07b=135 \Rightarrow b\approx 183$. Daraus folgt in der zweiten Zeile: $135y+0{,}6b+90-0{,}18b=b \Rightarrow y\approx 0{,}12$. So ergibt sich: $0{,}7+0{,}12+z=1 \Rightarrow z\approx 0{,}18$, d. h. die Abwanderungsrate von Wald A nach Wald B müsste etwa 12 % betragen, die von Wald A nach Wald C etwa 18 %.			4
	e	$\overrightarrow{v_2} = N*\left(N*\begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 86 \\ 137 \\ 394 \\ 104 \end{pmatrix}$		3	
	f	Mit dem Term lässt sich die die Verteilung der Wildkatzen am Ende des dritten Jahres nach der Erweiterung bestimmen. Begründung: Es gilt: $N^3*\begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + \left(N^2+N+E\right)*\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = N^3*\begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + N^2*\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + N*\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Am Ende des dritten Jahres nach der Erweiterung gibt $N^3*\begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix}$ die Verteilung der Tiere ohne die zusätzlich ausgesetzten Tiere an,		3	

		Lösungsskizze	I	II	III
		$N^2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Verteilung, der am Ende des 1. Jahres ausgesetzten Tiere an, $N * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Verteilung, der am Ende des 2. Jahres ausgesetzten Tiere an und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Verteilung, der am Ende des 3. Jahres ausgesetzten Tiere an.			
2	**a**	$P^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 160 \\ -80 \end{pmatrix}$ Eine negative Anzahl von Tieren ist im Sachzusammenhang nicht sinnvoll.		2	
	b	Es gilt $P^4 * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 47 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $P^6 * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 57 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Hieraus ergibt sich: $\frac{57}{47} \approx 1{,}21$. Wegen $c \cdot 1{,}21^2 \approx 47$ gilt $c \approx 32$. Die jährliche Entwicklung der Anzahl der Welpen wird ab dem Zeitpunkt zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung näherungsweise beschrieben durch $w(t) \approx 32 \cdot 1{,}21^t$ mit $t \geq 2$, wobei t in Jahren nach Beginn der Untersuchung.			4
	Verteilung der insgesamt **25** Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**5**	**12**	**8**