Schriftliche Abiturprüfung 2019

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Freitag, 3. Mai 2019, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421…)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 225 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen **Analysis**, **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**. Im Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.

- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, kommen die Aufgaben aus den Themenbereichen **Analysis**, **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**. Im Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt jeweils in einem der beiden Themen haben. Den Schülerinnen und Schülern werden drei Aufgaben vorgelegt-Der Fachprüfungsausschuss wählt in den Themenbereichen **Analysis** sowie **Lineare Algebra und Analytische Geometrie** jeweils eine der beiden vorgelegten Aufgaben aus, die Aufgabe aus dem Themenbereich **Wahrscheinlichkeitsrechnung** / **Statistik** ist verpflichtend. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 1				
a)	Graph I gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $\left(0 \mid f(0)\right)$ nicht kleiner als -1 ist.		3	
b)	Für $1 \le x \le 3$ gilt $F'(x) = f(x) \le 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend.	1	1	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**4**	**0**

Lösungsskizze		I	II	III
Aufgabe 2				
a)	Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.	1	1	
b)	$f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$. Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$, d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.			3
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**1**	**3**

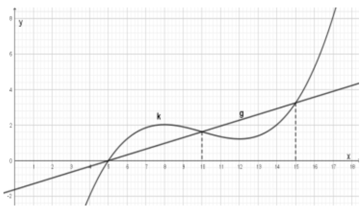
Lösungsskizze		I	II	III
Aufgabe 3				
a)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$.	2		
b)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$.		3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 4				
a)	Zum Beispiel: $(0\|0\|1)$	1		
b)	$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$. Also steht der Normalenvektor von F senkrecht auf beiden Richtungsvektoren von E. Daraus folgt die Behauptung.		2	
c)	Zum Beispiel: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**4**	**0**

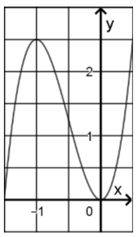
		I	II	III
Aufgabe 5				
a)	Der Anteil am Gesamtzustand, der sich im Zustand A befindet, nähert sich 0, während sich der Anteil am Gesamtzustand, der sich im Zustand B befindet, 1 nähert.	1	1	
b)	$M * \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot a_n\\ \frac{1}{2}\cdot a_n + b_n\end{pmatrix}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$, d. h. der gesuchte Wert von n ist 4.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

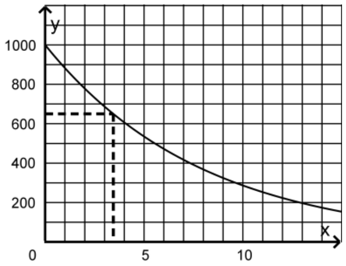
Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(0)=80$ und $f(2)\approx 143$. Die Ergebnisse sind jeweils die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute.
$160=180-100\cdot e^{-0,5\cdot t} \Rightarrow t=\frac{\ln(0,2)}{-0,5}\approx 3,22$ Nach ca. 3,22 Minuten wird eine Herzfrequenz von 160 Schlägen pro Minute erreicht.
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=180$. Für eine große Laufzeit nähert sich die Herzfrequenz 180 Herzschlägen pro Minute an.
$f'(t)=50\cdot e^{-0,5t}=10 \Rightarrow t=\frac{\ln(0,2)}{-0,5}\approx 3,22$.
Nach ca. 3,22 Minuten nimmt die Herzfrequenz um 10 Schläge pro Minute zu.</td><td>4</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Anzahl der Herzschläge vom Testbeginn bis zum Zeitpunkt x lässt sich durch die Funktion
$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$
bestimmen. Mit
$$H(10)=\int_0^{10} f(t)\,dt\approx 1601$$
sind also in den ersten 10 Minuten ca. 1601 Herzschläge erfolgt.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$s(3)=190-a\cdot e^{b\cdot 3}=150 \Rightarrow a=\frac{40}{e^{b\cdot t}}$.
$s'(3)=-a\cdot b\cdot e^{b\cdot 3}=10$. Einsetzen von a führt zu $b=-0,25$ und zu
$a=\frac{40}{e^{-0,75}}\approx 84,68$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td><table><tr><td>x</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>$k_{0,75}(x)$</td><td>1,63</td><td>1,23</td></tr><tr><td>$k'_{0,75}(x)$</td><td>-0,3</td><td>0</td></tr><tr><td>$k''_{0,75}(x)$</td><td>0</td><td>0,3</td></tr></table>$k'_{0,75}(x)=0,075x^2-1,5x+7,2$
$k''_{0,75}(x)=0,15x-1,5$
Zum Testbeginn bei 8,5km/h beträgt die Laktatkonzentration 2 mmol/l. Bei ansteigender Geschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration zunächst ab. Dabei erfolgt die größte Abnahme der Laktatkonzentration bei 10km/h (um 0,3 $\frac{\text{mmol/l}}{\text{km/h}}$). Bei 12 km/h erreicht die Laktatkonzentration den geringsten Wert mit 1,23 mmol/l und steigt dann kontinuierlich an. Bei 17,5 km/h erreicht die Laktatkonzentration mit 9,9 mmol/l den höchsten Wert.</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$k_c'(x)=0,075x^2-2cx+7,2$, $k_c''(x)=0,15x-2c$ und $k_c'''(x)=0,15$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
	$k_c''\left(\frac{40}{3}c\right)=0{,}15\cdot\frac{40}{3}c-2c=0 \wedge k_c'''\left(\frac{40}{3}c\right)=0{,}15\neq 0 \Rightarrow x=\frac{40}{3}c$ ist Wendestelle $k_c\left(\frac{40}{3}c\right)=0{,}025\cdot\left(\frac{40}{3}c\right)^3-c\cdot\left(\frac{40}{3}c\right)^2+7{,}2\cdot\left(\frac{40}{3}c\right)-20{,}375$ $=-\frac{3200}{27}c^3+96c-20{,}375$ $\Rightarrow W\left(\frac{40}{3}c \mid -\frac{3200}{27}c^3+96c-20{,}375\right)$ ist Wendepunkt der Funktion $k_c(x)$. Mit $c=\frac{3}{40}x$ ergibt sich $w(x)=-0{,}05x^3+7{,}2x-20{,}375$.		5	4
3				
a)	 Die Lösungen der Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von $k_{0,75}$ und g. Einzeichnen der Geraden g. Ablesen ergibt $x_1=5$, $x_2=10$ und $x_3=15$.	2	1	
b)	Das Integral bestimmt den durchschnittlichen Funktionswert in einem Intervall symmetrisch um den Wendepunkt von $k_{0,75}$ und aufgrund der Symmetrie des Graphen von $k_{0,75}$ bezüglich des Wendepunktes, ergibt sich als Lösung der Funktionswert des Wendepunktes. Die Funktionswerte sind für $x<5$ negativ und für $x>5$ positiv. Damit ist der Wert des Integrals für $z=4$ negativ und für $z=5$ positiv. Für $4\leq z\leq 5$ nimmt der Wert des Integrals mit zunehmenden Werten von z kontinuierlich zu, bis es null ergibt.			5
c)	$k_{0,75}'(x)=-0{,}75x^2-1{,}5x+7{,}2 \quad \Rightarrow k_{0,75}'(10)=-0{,}3$ Unter Berücksichtigung des Graphen von $k_{0,75}$ ergibt sich für die Steigungen m der Geraden g durch den Wendepunkt $m\in\left]-\infty;-0{,}3\right]$.			2
Verteilung der insgesamt 40 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**9**	**19**	**12**

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	**II**	**III**
1				
a)	Der gesuchte Funktionsgleichung hat die Form $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Da $(0\,\vert\,0)$ Tiefpunkt ist, gilt $c=d=0$. Damit: $g'(x)=3ax^2+2bx$, $g''(x)=6ax+2b$ Mit $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 2b=a+10$ ergibt sich: $g''\left(-\frac{1}{2}\right)=-3a+a+10=0\Leftrightarrow a=5$, d. h. $b=\frac{15}{2}$. Damit $g(x)=5x^3+\dfrac{15}{2}x^2$.  $\tan\alpha=g'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, d. h. $\alpha\approx-75°$ Die Größe des Winkels mit dem x-Achse beträgt etwa 75°.	2	9	
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$, d. h. der Graph von h nähert sich für $x\to-\infty$ der x-Achse beliebig nahe an. $h'(x)=10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}+5x^2\cdot 2x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}=10x\cdot\left(1+x^3\right)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=0$, $h(-1)=5e^{-\frac{2}{3}}$, $h'(-2)\approx 0{,}7>0$, $h'(-0{,}5)\approx-4{,}0<0$ Damit: $\left(-1\,\vert\,5e^{-\frac{2}{3}}\right)$ ist der Hochpunkt. Die Aussage ist falsch. Mögl. Begründung: Das Krümmungsverhalten des Graphen einer Stammfunktion von h ändert sich für einen Wert von x, wenn der Graph von h dort einen Extrempunkt hat. Der Graph von h hat für $-1{,}5\le x\le 1$ mehr als einen Extrempunkt. Mögl. Argumentation: Es gilt $H'(x)=h(x)$. Da $h(x)\ge 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ sowie $h(0)=0$, ist der Graph von H monoton steigend und dessen Steigung für $x=0$ null. Dies gilt nur für den Graphen I.	2	6	6
c)	Da das Produkt negativ ist, haben die beiden Differenzen unterschiedliche Vorzeichen. Damit haben die Graphen von g und h im angegebenen Bereich mindestens einen Schnittpunkt.			3

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
2				
a)	Die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt, ist etwa 3,4 km.  $p'(x) = -125e^{-\frac{x}{8}}$, $p'(1{,}785) = -125e^{-\frac{1{,}785}{8}} \approx -100$, d. h. die Änderungsrate beträgt etwa $-100\,\frac{\text{hPa}}{\text{km}}$.	5		
b)	$1000e^{-\frac{x}{8}} = 800 - 100$ liefert $x = -8 \cdot \ln\frac{700}{1000} \approx 2{,}853$. Die Bergsteiger befinden sich in einer Höhe von etwa 2853 m. Die Gleichung hat die Form $y = -0{,}01x + n$. Da der Punkt $(800 \mid 1{,}785)$ auf dem Graphen der Funktion liegt, ergibt sich: $1{,}785 = -0{,}01 \cdot 800 + n \Leftrightarrow n = 9{,}785$ damit ist $y = -0{,}01x + 9{,}785$.		4	3
Verteilung der insgesamt 40 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**9**	**19**	**12**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\binom{60}{3} = 34220$

$\frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} \approx 28{,}9\%$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bezeichnet man die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder mit k, ergibt sich mit K: „Der Fahrgast ist ein Kind.“ sowie E: „Der Fahrgast isst ein Eis.“ folgende Vierfelder-Tafel:
<table>
<tr><th></th><th>K</th><th>$\overline{K}$</th><th></th></tr>
<tr><td>E</td><td>$\frac{3}{4} \cdot k$</td><td>$\frac{1}{3} \cdot (60-k)$</td><td>30</td></tr>
<tr><td>$\overline{E}$</td><td>$\frac{1}{4} \cdot k$</td><td>$\frac{2}{3} \cdot (60-k)$</td><td>30</td></tr>
<tr><td></td><td>k</td><td>60-k</td><td>60</td></tr>
</table>
Für die Anzahl der Fahrgäste, die ein Eis essen, gilt damit: $\frac{3}{4} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot (60-k) = 30$
$\Rightarrow \frac{5}{12} \cdot k = 10 \Rightarrow k = 24$. An der Fahrt nehmen somit 24 Kinder teil.</td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Das Erscheinen bzw. Nichterscheinen erfolgt in der Regel für einige Personen mit Reservierung (z. B. befreundete Personen) nicht unabhängig voneinander.
X: Anzahl der <u>nicht</u> erscheinenden Personen mit Reservierung
Es gilt $E(X) = 64 \cdot 0{,}10 = 6{,}4$. Wegen $P_{0,1}^{64}(X=6) \approx 16{,}6\%$ und $P_{0,1}^{64}(X=7) \approx 15{,}3\%$ erscheinen 6 Personen mit der größten Wahrscheinlichkeit von 16,6% <u>nicht</u>.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>X: Anzahl der <u>nicht</u> erscheinenden Personen mit Reservierung
$P_{0,1}^{64}(X \leq 3) \approx 10{,}6\%$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der Fehler erster Art darf höchstens 5 % betragen.
$P_{0,1}^{200}(X \geq 27) \approx 6{,}7\%$, $P_{0,1}^{200}(X \geq 28) \approx 4{,}3\%$
Erscheinen mindestens 28 Personen mit Reservierung <u>nicht</u> zur Fahrt, so wird die Nullhypothese abgelehnt.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Fehler erster Art tritt ein, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit Reservierung <u>nicht</u> zur Fahrt erscheint, tatsächlich nicht größer ist als 10 %, das Unternehmen aufgrund des Testergebnisses aber mehr Reservierungen annimmt. Es wird riskiert, dass mehr Personen abgewiesen werden müssen.

Der Fehler zweiter Art tritt ein, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit Reservierung <u>nicht</u> zur Fahrt erscheint, tatsächlich größer ist als 10 %, das Unternehmen aufgrund des Testergebnisses aber bei der bisherigen Anzahl der Reservierungen bleibt. Es wird riskiert, dass mehr Plätze frei bleiben.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
	Bei der Durchführung des Tests beträgt das Risiko, die Anzahl der Reservierungen irrtümlich zu erhöhen, höchstens 5 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich bei der bisherigen Anzahl zu bleiben, kann dagegen wesentlich größer sein. Damit stand bei der Wahl der Nullhypothese das Interesse im Vordergrund, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen.		2	4
c)	Würde es sich um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln, so wäre $p = \frac{14}{70} = 0{,}2$. Es gilt $P_{0,2}^{70}(X = 14) \approx 11{,}85\,\%$. Die abgebildete Wahrscheinlichkeitsverteilung zeigt für 14 Erfolge jedoch eine Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 0,11 ist.			3
Verteilung der insgesamt 30 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**6**	**15**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Es gilt: $\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EI}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EK}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{n}*\overrightarrow{EK}=\vec{n}*\overrightarrow{EI}=0$ liefern $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ als Normalenvektor von W. Damit hat die Gleichung von W die Form $x_1+x_2+2x_3+d=0$. Mit $E\in W$ ergibt sich $d=-4$. Es gilt: $\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\|}\right)=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\approx 35{,}26°$.	5	3	
b)	Es gilt: $\left(\frac{4+2}{2}\mid\frac{4+2}{2}\mid\frac{-1+(-1)}{2}\right)=(3\mid 3\mid -1)$. Der Schnittpunkt von W und u ist J. Setzt man also u in W ein so gilt: $4+r+4+r+2\cdot(-1+r)=4\Leftrightarrow 4r=-2\Leftrightarrow r=-\frac{1}{2}$. Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$, d. h. $J(3{,}5\mid 3{,}5\mid -1{,}5)$.	1	4	
c)	Abstand von A zu W: $\frac{\lvert 4+4-2-4\rvert}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ Flächeninhalt des Drachenvierecks EIJK: $\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{IK}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{EJ}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}\right\|=\frac{3}{2}\sqrt{6}$ Volumen der Pyramide EIJKA: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=1$ Damit geht $1\,\text{mm}^3$ des Edelsteins verloren.		6	
d)	Die Aussage ist richtig. Begründung: $\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punkts G. Die Ebene, in der das zugehörige Drachenviereck liegt, steht aufgrund der Symmetrie des Körpers senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Dieser steht wegen $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ senkrecht zu den in der Gleichung auftretenden Richtungsvektoren.			3

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von V und es ergibt sich als Ebenengleichung in Koordinatenform $V: x_1 - x_2 = 0$.

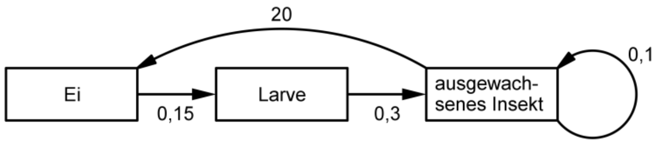
Setzt man g_a in V ein so folgt mit $2 + 2a - (2 + 2a) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ eine wahre Aussage, also liegt g_a in V.

Es gilt $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Durch Einsetzen von h in V folgt

$4 - 2t - (-4 + 8t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5}$. Daraus ergibt sich der Schnittpunkt $(2{,}4 \mid 2{,}4 \mid -1)$.</td><td></td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 30 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>6</td><td>15</td><td>9</td></tr>
</table>

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

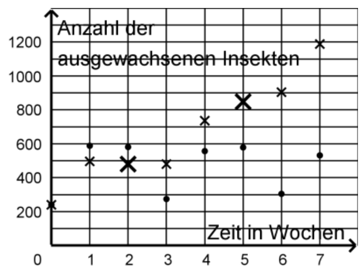
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>



Innerhalb von zwei Woche entwickeln sich $1-0{,}15\cdot 0{,}3=0{,}955=95{,}5\%$ der Eier nicht weiter zu ausgewachsenen Insekten.</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$$\vec{v}_2 = A^2 * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^2 * \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24800 \\ 1200 \\ 480 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_5 = A^3 * \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^3 * \begin{pmatrix} 24800 \\ 1200 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36800 \\ 2400 \\ 848 \end{pmatrix}$$



</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>In einer Population der Art β nähern sich die Anzahlen von Eiern, Larven und ausgewachsenen Insekten im Laufe der Zeit jeweils einem festen Wert.

In einer Population der Art α können die Anzahlen von Eiern, Larven und ausgewachsenen Insekten im Laufe der Zeit jeweils beliebig groß werden.

$B\cdot B_G = B_G \Leftrightarrow 0{,}15\cdot\frac{50}{7} = x \Leftrightarrow x=\frac{15}{14}$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Senkt man die Überlebensrate der ausgewachsenen Insekten auf 0, so ergibt sich:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit wiederholt sich die Zusammensetzung der Population alle drei Wochen. Durch den Eingriff kann die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten also zyklisch nach oben beschränkt werden.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Der zweite Eingriff verringert den Anteil der Eier, die in das Larvenstadium übergehen.

Aus $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$ folgt für $\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 50\cdot I \\ t\cdot E \\ 0{,}2\cdot L + 0{,}5\cdot I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
	Die Zusammensetzungen werden durch $k \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{N}$ dargestellt, der zugehörige Wert von t ist 0,05. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} N \\ L \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \cdot L \\ 5I - 0{,}05N \\ 0{,}02N \end{pmatrix}$ Für $I < 0{,}01N$ gilt $5I - 0{,}05N < 0$. Da die Anzahl der Larven nicht negativ sein kann, können sich Zusammensetzungen nicht ergeben, bei denen die Anzahl der ausgewachsenen Insekten weniger als 1% der Anzahl der Eier beträgt. Alternative Lösungen sind möglich.		6	3
2				
a)	Es gilt: $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}^2 * \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ts & 0 & 0 \\ 0 & st & 0 \\ us & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^2s & 0 \\ ts^2 & 0 & 0 \\ 0 & stu & 0 \end{pmatrix}$. Für $M^3 = M$ muss daher gelten: $\begin{vmatrix} s & = & s^2t \\ t & = & st^2 \\ u & = & stu \end{vmatrix} \Leftrightarrow st = 1 \Leftrightarrow s = \frac{1}{t}$.		3	3
Verteilung der insgesamt 30 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**6**	**15**	**9**

Schriftliche Abiturprüfung 2019

Leistungskurs Mathematik

Freitag, 3. Mai 2019, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

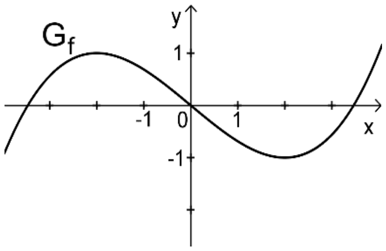
- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

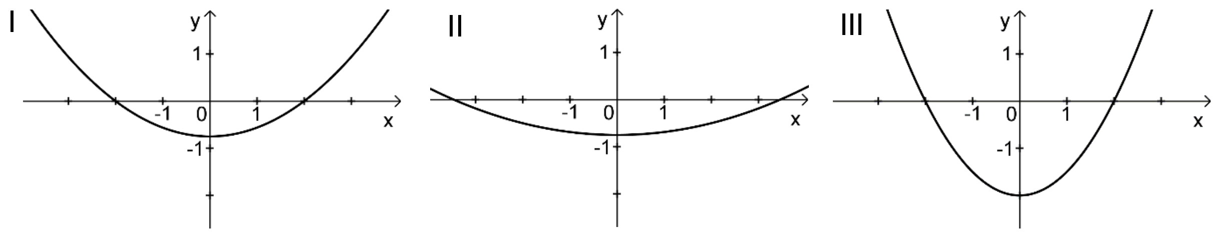
- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.



a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.
Geben Sie diesen Graphen an.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

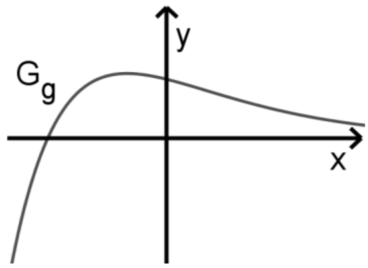


(3 BE)

b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an.
Begründen Sie Ihre Angabe.

(2 BE)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis



Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in IR definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in IR definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.

a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

(2 BE)

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

a) Das Glücksrad wird viermal gedreht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

(2 BE)

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

(3 BE)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen E mit

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$$

und F mit

$$F:\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 1$$

gegeben.

a) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes an, der in F liegt.

(1 BE)

b) Zeigen Sie, dass F parallel zu E ist.

(2 BE)

c) Geben Sie eine Gleichung einer Ebene an, die senkrecht zu F ist und den Koordinatenursprung enthält.

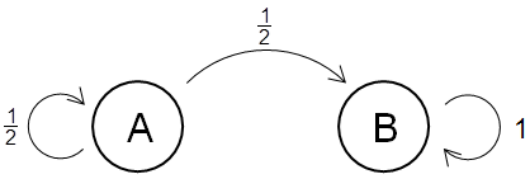
(2 BE)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

In einem System verteilt sich der Gesamtbestand auf die Zustände A und B.

Zum Zeitpunkt n mit $n \in \mathbb{N}$ wird die Verteilung auf die Zustände A und B durch den Verteilungsvektor $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ beschrieben. Dabei gibt a_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands an, der sich im Zustand A befindet, und b_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands, der sich im Zustand B befindet. Zum Zeitpunkt 0 sind beide Anteile größer als null.

Die Abbildung beschreibt die Übergänge zwischen den Zuständen von einem Zeitpunkt zum nächsten.



Die Entwicklung der Verteilung wird durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

beschrieben.

a) Beschreiben Sie mithilfe der Abbildung, wie sich die Verteilung auf lange Sicht entwickelt.

(2 BE)

b) Bestimmen Sie mithilfe des Terms $M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ den kleinsten Wert von n, für den der Anteil des Gesamtbestands, der sich im Zustand A befindet, bis zum Zeitpunkt n auf weniger als 10% seines Werts zum Zeitpunkt 0 abnimmt.

(3 BE)

Schriftliche Abiturprüfung 2019

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Freitag, 3. Mai 2019, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 225 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Sportler

[Logo Herz]

1 Herzfrequenzmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *gleichbleibender* Geschwindigkeit die Herzfrequenz gemessen. Die Abhängigkeit der Herzfrequenz von der Zeit kann modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$f(t) = 180 - 100 \cdot e^{-0,5t}$ für $t \geq 0$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Minuten und $f(t)$ die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute.

a) **Berechnen** Sie die Herzfrequenz des Sportlers zum Startzeitpunkt und nach zwei Minuten nach diesem Modell.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem der Sportler eine Herzfrequenz von 160 Schlägen pro Minute erreicht.

Ermitteln Sie $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ und interpretieren Sie das Ergebnis für eine lange Laufzeit.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Herzfrequenz des Sportlers jede Minute um 10 Schläge pro Minute zunimmt.

(7 BE)

b) **Geben** Sie eine Funktion an, mit der man die gesamte Anzahl der Herzschläge seit Testbeginn in Abhängigkeit von der Zeit bestimmen kann.

Bestimmen Sie die gesamte Anzahl der Herzschläge des Sportlers in den ersten zehn Minuten.

(2 BE)

c) Ein anderer Sportler erreicht nach 3 Minuten eine Herzfrequenz von 150 Schlägen pro Minute und seine Herzfrequenz nimmt zu diesem Zeitpunkt jede Minute um 10 Schläge pro Minute zu.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben die Parameter a und b einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s der Form $s(t) = 190 - a \cdot e^{b \cdot t}$, die diesen Lauf des Sportlers für $t \geq 0$ modelliert, wobei t die Zeit in Minuten und s(t) die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute ist.

(5 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion k_c mit

$k_c(x) = 0{,}025x^3 - c \cdot x^2 + 7{,}2x - 20{,}375$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $c = 0{,}75$.

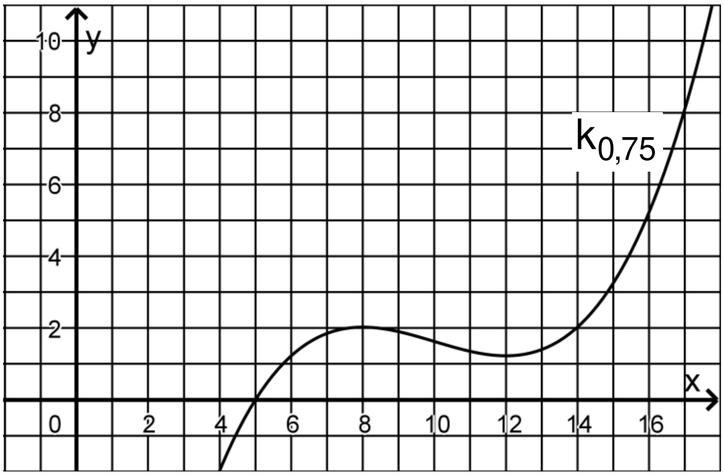


Abbildung 1

2 Laktatmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *ansteigender* Geschwindigkeit jeweils die Konzentration sogenannter Laktate im Blut gemessen. Die Abhängigkeit der Laktatkonzentration von der Geschwindigkeit kann für c modellhaft durch die Funktion k_c mit $8{,}5 \le x \le 17{,}5$ und $0{,}745 \le c \le 0{,}755$ beschrieben werden. Dabei ist x die Geschwindigkeit des Sportlers in Kilometer pro Stunde und $k_c(x)$ die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter $\left(\frac{\text{mmol}}{\text{l}}\right)$.

a) **Bestimmen** Sie die drei Werte der in der Tabelle grau markierten Felder.

x	8,5	10	12	17,5
$k_{0,75}(x)$	2,0	1,63	1,23	9,9
$k'_{0,75}(x)$	-0,13			3,92
$k''_{0,75}(x)$	-0,23		0,3	1,13

Beschreiben Sie für $8{,}5 \le x \le 17{,}5$ den Verlauf des Graphen in Abbildung 1 im Sachzusammenhang und gehen Sie dabei auch auf die Werte an den Stellen $x = 10$ und $x = 12$ ein.

(7 BE)

b) **Zeigen** Sie, dass $W\left(\frac{40}{3}c \,\middle|\, -\frac{3200}{27}c^3 + 96c - 20{,}375\right)$ der Wendepunkt des Graphen der Funktion k_c in Abhängigkeit von c ist.

Alle Wendepunkte der Kurvenschar k_c liegen auf dem Graphen der Funktion w.

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion w.

(9 BE)

3 Innermathematische Betrachtungen

Der Graph von $k_{0,75}$ ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes $W\left(10 \mid \frac{13}{8}\right)$. Betrachtet werden die Geraden, die durch den Wendepunkt W verlaufen.

a) Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = \frac{13}{40}x - \frac{13}{8}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie grafisch die Lösungen der Gleichung $k_{0,75}(x) - g(x) = 0$ mit Hilfe der Abbildung 1.

(3 BE)

b) **Begründen** Sie ohne zu rechnen, dass gilt: $\frac{1}{2 \cdot h} \cdot \int_{10-h}^{10+h} k_{0,75}(x)\,dx = k_{0,75}(10)$ für $h \in \mathbb{R}$ und $h > 0$.

Begründen Sie mit Hilfe der Abbildung 1, dass es eine reelle Zahl z mit $4 < z < 5$ gibt, für die $\int_{z}^{z+1} k_{0,75}(x)\,dx = 0$ gilt.

(5 BE)

c) Betrachtet werden nun Geraden, die durch den Wendepunkt W verlaufen, eine negative Steigung haben und keinen weiteren gemeinsamen Punkt mit dem Graphen von $k_{0,75}$ aufweisen.

Ermitteln Sie alle möglichen Steigungen, die diese Gerade haben könnte.

(2 BE)

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis GTR

Luftdruck

1 Innermathematische Betrachtungen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$ und den Wendepunkt $W\left(-\frac{1}{2}\,|\,\frac{5}{4}\right)$.

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung von g.

(zur Kontrolle: $g(x) = 5x^3 + 7{,}5x^2$)

Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1{,}5 \le x \le 0{,}5$ in ein Koordinatensystem ein.

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. **Berechnen** Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

(11 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

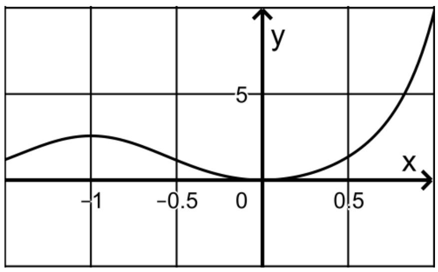


Abbildung 1

b) **Geben** Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und **beschreiben** Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

Bestimmen Sie rechnerisch die erste Ableitungsfunktion von h.

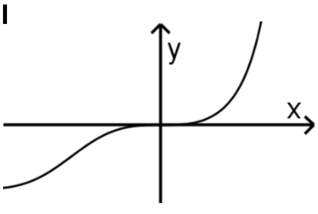
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von h. **Weisen** Sie nach, dass es sich wirklich um einen Hochpunkt handelt.

Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 1 die folgende Aussage:

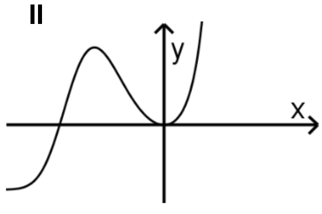
Für $-1{,}5 \le x \le 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten.

Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion H mit $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ darstellt. **Begründen** Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe des Verlaufs der angegebenen Graphen.

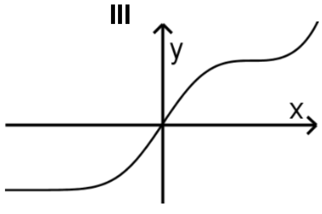
I



II



III



(14 BE)

c) Betrachtet werden nun die beiden Funktionen g und h aus den vorherigen Teilen. Es gilt

$$\left(h(1)-g(1)\right)\cdot\left(h(2)-g(2)\right)<0.$$

Erläutern Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1<x<2$.

(3 BE)

2 Luftdruck

Der Luftdruck wird in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel modellhaft mithilfe der Funktion p mit $p(x)=1000\cdot e^{-\frac{x}{8}}$ und $x\in\mathbb{R}, x\geq 0$ beschrieben. Dabei ist x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern und $p(x)$ der Luftdruck in Hektopascal (hPa). Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p.

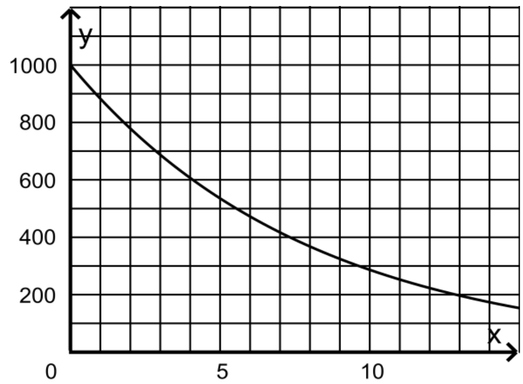


Abbildung 2

a) **Bestimmen** Sie grafisch die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt. **Veranschaulichen** Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 2.

Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate des Luftdrucks in einer Höhe von 1,785 km.

(5 BE)

b) Laut einer Faustregel sinkt der Luftdruck um 1 hPa, wenn die Höhe um 10 m zunimmt.

Eine Gruppe von Bergsteigern misst in einer Höhe von 1785m einen Luftdruck von 800hPa. Nach weiterem Aufstieg liefert die Faustformel eine Höhe von 2785m. **Bestimmen** Sie mit Hilfe der Funktion p die genauere Höhe.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, die ausgehend von einem Luftdruck von 800 hPa in einer Höhe von 1785 m für jeden anderen Luftdruck (in hPa) die der Faustregel entsprechende Höhe (in km) liefert.

(7 BE)

Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik GTR

Ausflugsschiff

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

1 Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist.

a) Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.

Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen.

(4 BE)

b) Unter den 60 Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %.

Stellen Sie die Daten in einer Vierfelder-Tafel **dar**, dabei soll die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder mit k bezeichnet werden.

Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.

(5 BE)

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb mehr Reservierungen zu. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

2 Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

a) **Geben** Sie einen Grund dafür **an**, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Es gibt eine Anzahl an Reservierungen, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht wahrgenommen werden, am größten ist. **Ermitteln** Sie diese Wahrscheinlichkeit.

(4 BE)

b) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

(3 BE)

3 Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Daher stellt sich die Frage, ob pro Fahrt zukünftig mehr als 64 Reservierungen angenommen werden sollen.

Als Grundlage für diese Entscheidung soll die Nullhypothese

„Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“

mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

a) **Ermitteln** Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.
(Beachten Sie die Tabelle im Anhang).

(5 BE)

b) **Beschreiben** Sie den Fehler erster Art sowie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang und **erläutern** Sie jeweils kurz, welches Risiko das Unternehmen eingeht.

Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse im Vordergrund stand,
- dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder
- dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(6 BE)

Eine binomialverteilte Zufallsgröße Y gibt für eine Erfolgswahrscheinlichkeit p mit $0 < p < 1$ die Anzahl der nicht zur Fahrt erscheinenden Personen bei 70 Online-Reservierungen an. Dabei hat p genau eine Nachkommastelle.

Die Abbildung 1 zeigt das Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X für $k \in \{0,1,2,3,...,70\}$.

c) **Begründen** Sie, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.

(3 BE)

SNR: Kursbezeichnung:

Name:

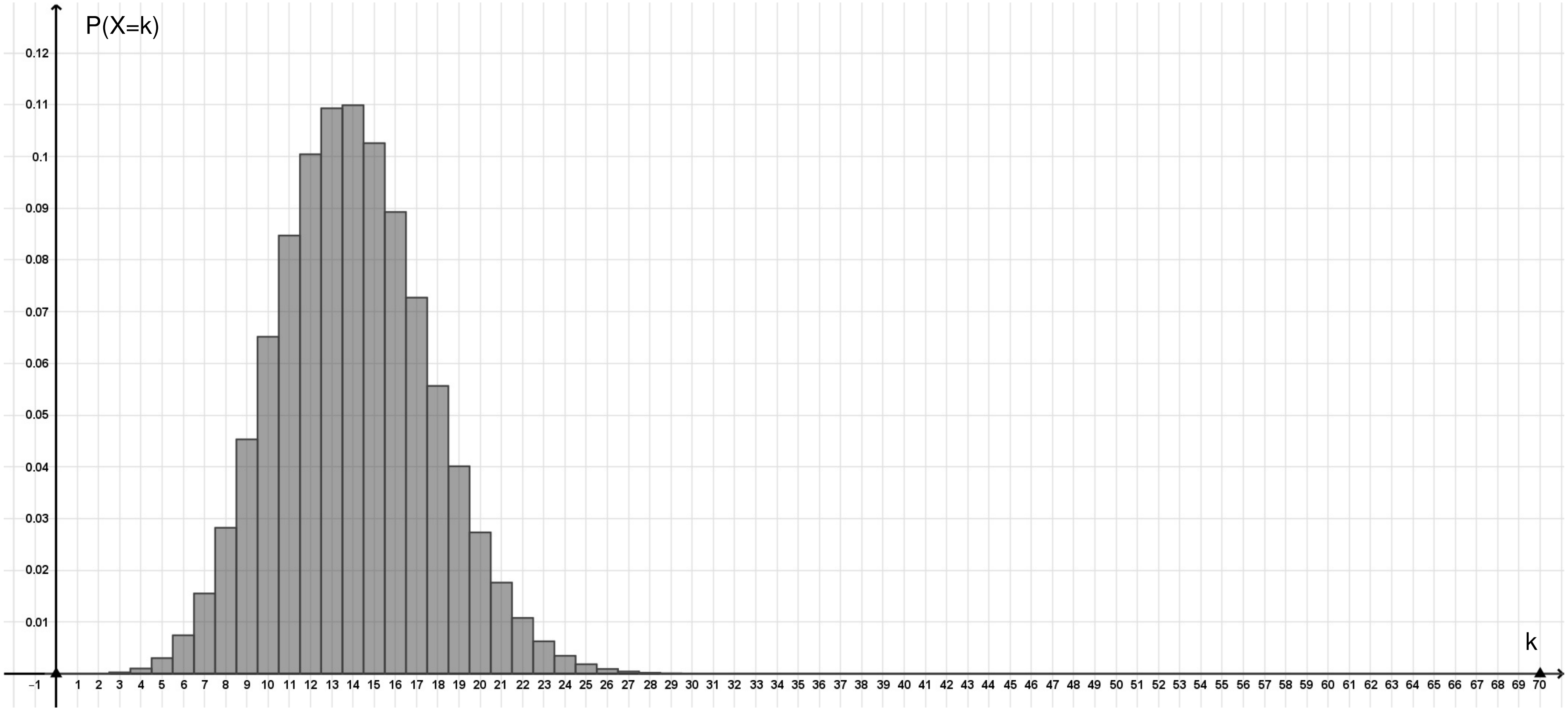


Abbildung 1

Anhang

B(n,p,k)					
n=200	p=0,05	p=0,10		p=0,05	p=0,10
k	P(X≤k)	P(X≤k)	k	P(X≤k)	P(X≤k)
0	0,0%	0,0%	21	100,0%	64,8%
1	0,0%	0,0%	22	100,0%	72,9%
2	0,2%	0,0%	23	100,0%	79,8%
3	0,9%	0,0%	24	100,0%	85,5%
4	2,6%	0,0%	25	100,0%	90,0%
5	6,2%	0,0%	26	100,0%	93,3%
6	12,4%	0,0%	27	100,0%	95,7%
7	21,3%	0,0%	28	100,0%	97,3%
8	32,7%	0,1%	29	100,0%	98,4%
9	45,5%	0,4%	30	100,0%	99,0%
10	58,3%	0,8%	31	100,0%	99,5%
11	70,0%	1,7%	32	100,0%	99,7%
12	79,6%	3,2%	33	100,0%	99,8%
13	87,0%	5,7%	34	100,0%	99,9%
14	92,2%	9,3%	35	100,0%	100,0%
15	95,6%	14,3%	36	100,0%	100,0%
16	97,6%	20,7%	37	100,0%	100,0%
17	98,8%	28,5%	38	100,0%	100,0%
18	99,4%	37,2%	39	100,0%	100,0%
19	99,7%	46,6%	40	100,0%	100,0%
20	99,9%	55,9%	41	100,0%	100,0%

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie **GTR**

Edelstein

Die Abbildung 1 in der Anlage stellt einen bearbeiteten Edelstein dar. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Längeneinheit einem Millimeter in der Wirklichkeit entspricht, sind die Quadrate ABCD und EFGH mit $A(4|4|-1)$ und $E(2|2|0)$ parallel zur x_1,x_2-Ebene. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sowie der Punkt $S(0|0|-5)$ liegen auf der x_3-Achse.

Die Abbildung 2 in der Anlage stellt den Edelstein nach einem zusätzlichen Bearbeitungsschritt dar, bei dem ein pyramidenförmiges Stück abgeschliffen wurde. Das Viereck EIJK mit $I(4|2|-1)$ und $K(2|4|-1)$ ist ein symmetrisches Drachenviereck und liegt in der Ebene W.

a) Die Gerade $u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft durch A.

Zeigen Sie, dass u auch durch S verläuft.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene W in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $W: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$)

Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebene W mit der Ebene, in der das Quadrat ABCD liegt.

(8 BE)

b) **Berechnen** Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{IK}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von J auf der Kante des Diamanten.

(zur Kontrolle: $J(3{,}5\,|\,3{,}5\,|\,-1{,}5)$)

(5 BE)

c) **Berechnen** Sie den Abstand vom Punkt A zur Ebene W.

Bestimmen Sie das Volumen des Teils des Edelsteins, der durch den zusätzlichen Bearbeitungsschritt verloren ging.

(6 BE)

d) In weiteren Bearbeitungsschritten werden auch an den Eckpunkten des Edelsteins, die durch B, C und D dargestellt sind, pyramidenförmige Stücke gleicher Form und Größe abgeschliffen. Anschließend ist der Edelstein symmetrisch bezüglich der Achse, die im Modell durch die x_3-Achse beschrieben wird.

Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Eine der drei Flächen, die durch die weiteren Bearbeitungsschritte entstanden sind, liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ mit } r,s \in \mathbb{R}.$$

(3 BE)

e) Gegeben sind die Geraden $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2+2a \\ 2+2a \\ 5-a \end{pmatrix}$ mit $r, a \in \mathbb{R}$.

Zudem spannen die Punkte S, A und E eine Ebene V auf.

Ermitteln Sie von V eine Ebenengleichung in Koordinatenform und **zeigen Sie**, dass alle Geraden g_a in dieser Ebene V liegen.

Durch jeden Punkt der Ebene V verläuft eine der Geraden g_a.

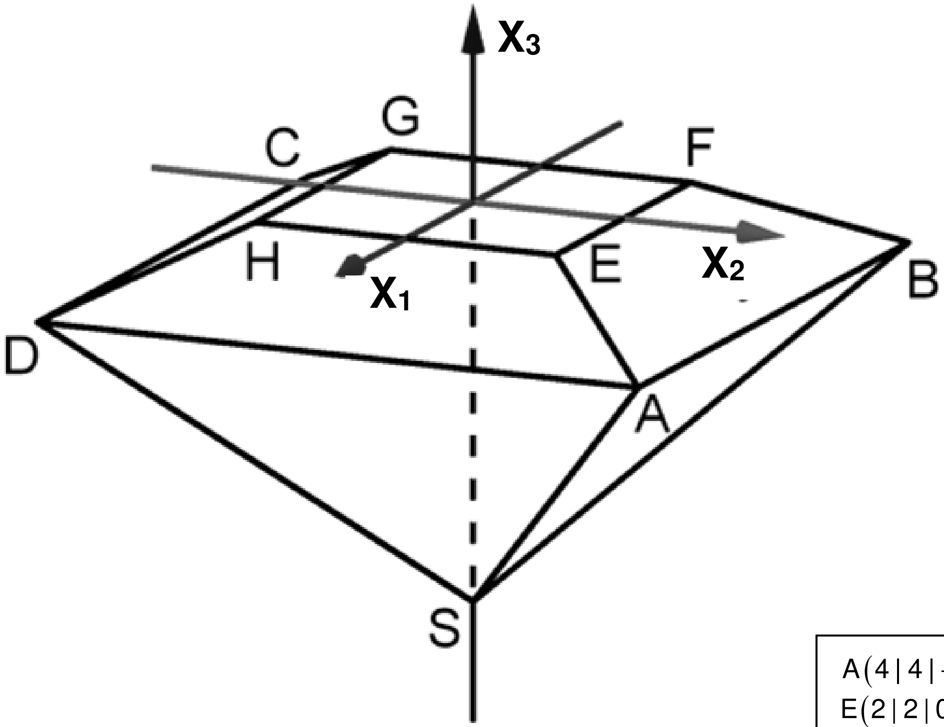
Eine der Geraden g_a schneidet die Gerade h, welche durch die Punkte D und K verläuft.

Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

(8 BE)

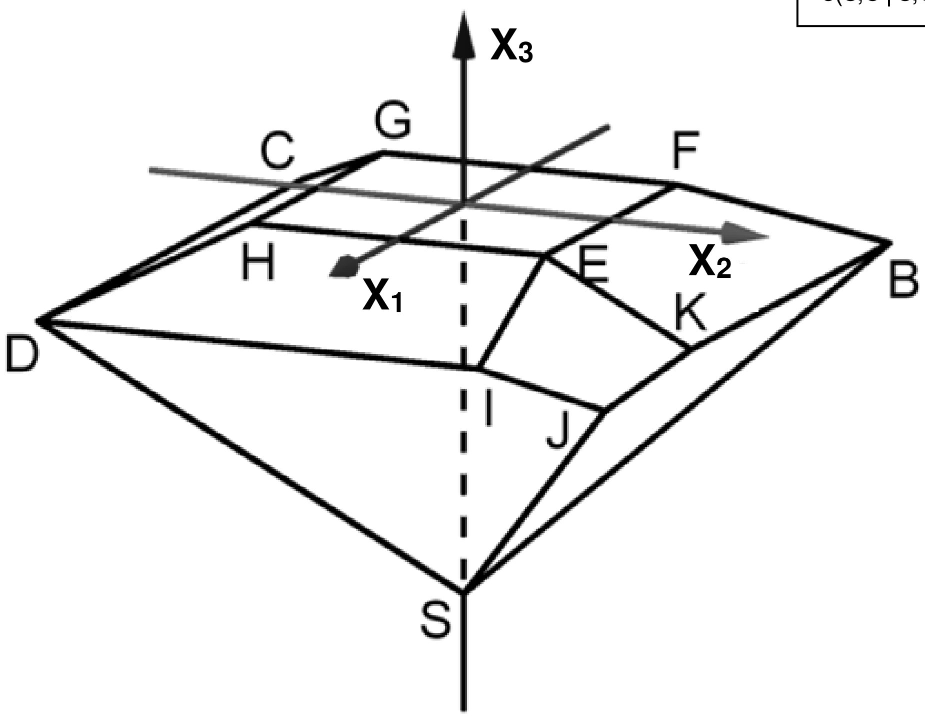
Anlage:

Abbildung 1:



$A(4\mid 4\mid -1)$
$E(2\mid 2\mid 0)$
$S(0\mid 0\mid -5)$
$I(4\mid 2\mid -1)$ und $K(2\mid 4\mid -1)$
$G(-2\mid -2\mid 0)$
$J(3{,}5\mid 3{,}5\mid -1{,}5)$

Abbildung 2



Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra **GTR**

Insekten

1 Bei Insekten der Arten α und β sind jeweils drei Lebensstadien, die jeweils eine Woche dauern, zu unterscheiden: aus einem Ei entwickelt sich über ein Larvenstadium ein ausgewachsenes Insekt. Für jede der beiden Arten lässt sich die Entwicklung einer Population von einer Woche n zur nächsten modellhaft durch eine Gleichung beschreiben:

Art α: $\overrightarrow{v_{n+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Art β: $\overrightarrow{w_{n+1}} = B \cdot \overrightarrow{w_n}$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

Dabei haben die Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ und $\overrightarrow{w_n}$ jeweils die Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven und I die Anzahl der ausgewachsenen Insekten angibt.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung einer Population der Art β in einem Übergangsdiagramm **dar**.

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Eier, die sich innerhalb von zwei Wochen nicht zu ausgewachsene Insekten weiter entwickeln.

(3 BE)

In einem ersten Raum befindet sich eine Population der Art α, in einem zweiten Raum eine Population der Art β. Jede der beiden Populationen setzt sich zu Beobachtungsbeginn aus 11600 Eiern, 1880 Larven und 240 ausgewachsenen Insekten zusammen.

b) Der Abbildung kann für jede der beiden Arten für bestimmte Zeitpunkte nach Beobachtungsbeginn jeweils die Anzahl der ausgewachsenen Insekten entnommen werden. Dabei werden die Anzahlen für die Art α durch Kreuze und für die Art β durch Punkte dargestellt.

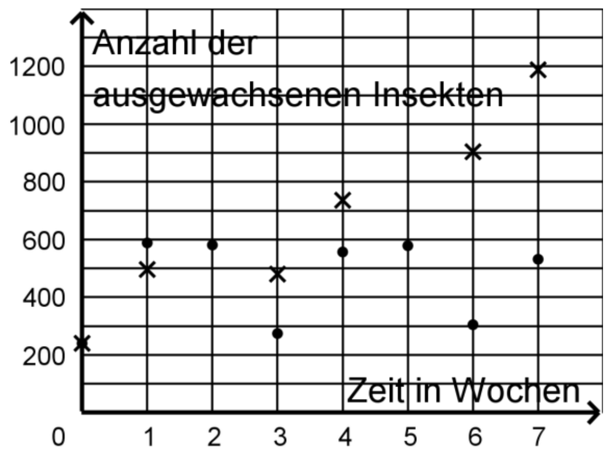


Abbildung 1

In der Abbildung fehlen zwei Kreuze. **Ermitteln** Sie, wie sich die Population zu diesen Zeitpunkten auf die drei Entwicklungsstadien verteilt und **zeichnen** Sie die zwei fehlenden Kreuze ein.

(4 BE)

c) **Interpretieren** Sie die folgenden richtigen Aussagen jeweils im Sachzusammenhang:

- Zu B existiert eine Grenzmatrix B_G, das heißt: Für $n \to \infty$ gilt $B^n = B_G$.
- Alle Einträge der Matrizen A^n werden mit wachsendem Wert von n beliebig groß.

Es gilt $B_G = \begin{pmatrix} \frac{9}{28} & \frac{15}{7} & \frac{50}{7} \\ \frac{27}{560} & \frac{9}{28} & x \\ \frac{9}{560} & \frac{3}{28} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$. **Ermitteln** Sie den Wert von x.

(5 BE)

In einem dritten Raum befindet sich eine Population der Art α. Um eine Methode zu finden, deren starkes Wachstum einzuschränken, werden im Modell unabhängig voneinander zwei verschiedene Eingriffe in die Entwicklung einer Population der Art α betrachtet.

d) Der erste Eingriff würde darin bestehen, die Überlebensrate $r \geq 0$ der ausgewachsenen Insekten zu senken.

Untersuchen Sie, ob die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten zyklisch nach oben beschränkt werden kann.

(3 BE)

e) Der zweite Eingriff würde dazu führen, dass, sich die Entwicklung der Population im Modell mithilfe einer Matrix der Form $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t < 0{,}1$ beschreiben ließe.

Interpretieren Sie die Wirkung des zweiten Eingriffs im Sachzusammenhang.

Es gibt einen Wert von t, für den sich bestimmte Zusammensetzungen der Population – mit mindestens einem ausgewachsenen Insekt – von einer Woche zur nächsten nicht verändern.
Ermitteln Sie diese Zusammensetzungen und den zugehörigen Wert von t.

Es gilt $A_t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} & 0 \\ -0{,}05 & 0 & 5 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass sich in der Entwicklung der Population eine Anzahl von N Eiern nicht gleichzeitig mit beliebigen Anzahlen von Larven oder ausgewachsenen Insekten ergeben kann.

(9 BE)

2 Gegeben seien Matrizen der Form $M = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}$ mit $s > 0$, $t > 0$ und $u > 0$.

a) **Leiten** Sie einen allgemeinen formalen Zusammenhang für die Matrixeinträge s, t und u **her**, so dass gilt: $M^3 = M$.

(6 BE)